Université de Toulouse III, UFR MIG - Département de Mathématiques
Année 2009-2010, Licence 3$^{\text{ème}}$ année, Mathématiques Fondamentales

Calcul Différentiel - Examen terminal du 21 mai 2010, 13h - 16h, amphi Fermat
Durée : 3 heures
Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

Question de cours. Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $C^1(U)$. Énoncer la definition d'une submersion et d'une immersion f en $a \in U$.

Exercice 1 Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1) \end{array}$$

(a) Pour quelles valeurs de $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ l'application f est une submersion en (x_0, y_0, z_0) ?

(b) Montrez que l'ensemble

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0)\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Préciser sa dimension.

(c) Montrez qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

(d) Calculer $\varphi'(1)$.

(e) Calculer l'espace tangent à V en $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$.

Exercice 2 On pose $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4}x^3$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que f admet un minimum local en $(0,0)$ qui n'est pas un minimum global.

(b) Calculer la différentielle seconde $D^2 f(-2,1)$ et les valeurs propres de la matrice Hessienne associée. Est-ce que f admet un minimum (maximum) local en $(-2,1)$?

(c) Déterminer les points de l'ellipse

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 = 3\} \tag{1}$$

vérifiant la condition d'extrémalité de Lagrange pour la fonction f.

(d) En déduire la valeur maximale et minimale de la restriction de f sur l'ellipse (1).

Exercice 3 On note $\mathcal{M}_n$ l'espace des matrice réelles $n \times n$ et $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{M}_n$ le sous-espace vectoriel des matrice *symétriques*, $\mathcal{S}_n = \{M \in \mathcal{M}_n : {}^tM = M\}$.Soit $\varphi : \mathcal{M}_n \to \mathcal{S}_n$ l'application définie par

$$\varphi(M) = {}^tMM.$$

(a) Calculer la différentielle de φ.

(b) Montrer que si $\varphi(A) = I$ (I est la matrice identité), alors φ est une submersion en A

(c) En déduire que le groupe orthogonal $O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n : \varphi(M) = I\}$ est une sous-variété de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$.