III - **Exercices et problèmes**

Tests

Test 1. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $\mathrm{L} : \Omega \to F$ une application linéaire continue. Montrer que L est $\mathcal{C}^\infty$. Soit $B : E \times F \to E$ une application bilinéaire continue. Calculer $D(\mathrm{L} \circ B)_{(a,b)}$.*

Corrigé. On a: $\forall a \in E, \forall h \in E :\ \mathrm{L}(a+h) - \mathrm{L}(a) = \mathrm{L}(h)$. L'application L étant par hypothèse linéaire continue, on en conclut que L est différentiable ($p_a = 0$) et $D\mathrm{L}_{(a)} = \mathrm{L}$. En particulier $D\mathrm{L} : E \to \mathcal{L}(E; F)$ est l'application qui vaut constamment L, donc est $\mathcal{C}^\infty$. Ce qui équivaut à dire que L est $\mathcal{C}^\infty$. Comme B est bilinéaire continue et L est linéaire continue, $\mathrm{L} \circ B$ est bilinéaire continue, donc $\mathcal{C}^\infty$, et on a: $\forall (a,b) \in E \times F, \forall (h,k) \in E \times F$: $D(\mathrm{L} \circ B)_{(a,b)}(h,k) = \mathrm{L}(B(a,k)) + \mathrm{L}(B(h,b))$.

Test 2. — *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés et $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire continue. Donner $DB_{(a,b)}(\vec{h}, \vec{k})$, quels que soient (a,b) et $(\vec{h}, \vec{k}) \in E \times F$ (sans preuve). Soient $\mathrm{L}_1 : E \times F :\to \mathcal{L}(E \times F; G)$ et $\mathrm{L}_2 : E \times F :\to \mathcal{L}(E \times F; G)$ définies par:*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{L}_1(a,b) : & E \times F & \to & G \\ & (\vec{h}, \vec{k}) & \mapsto & \mathrm{L}_1(a,b)(\vec{h}, \vec{k}) = B(\vec{h}, b) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{L}_2(a,b) : & E \times F & \to & G \\ & (\vec{h}, \vec{k}) & \mapsto & \mathrm{L}_2(a,b)(\vec{h}, \vec{k}) = B(a, \vec{k}) \end{array}$$

Exprimer $DB : E \times F \to \mathcal{L}(E \times F; G)$ en fonction de L_1 et L_2. En déduire que B est $\mathcal{C}^\infty$.

Corrigé. On sait que B est différentiable sur $E \times F$ et que $DB_{(a,b)}(h,k) = B(a,k) + B(h,b)$. On a ainsi: $DB = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$. Montrons que L_1 est linéaire continue. La linéarité résulte directement de la linéarité de B sur son deuxième facteur. Quel que soit $(a,b) \in E \times F$, quel que soit $(h,k) \in E \times F$, on a de plus: $||L_1(a,b)(h,k)|| = ||B(h,b)|| \leq ||B||.||h||.||b||$(par continuité de B)$\leq ||B||.||(a,b)||.||(h,k)||$, ce qui prouve que $\mathrm{L}_1(a,b)$ est bien continue et $||\mathrm{L}_1(a,b)|| \leq ||B||.||(a,b)||$, donc que L_1 est continue (et $||\mathrm{L}_1|| \leq ||B||$). De même L_2 est linéaire continue. B est somme de deux applications $\mathcal{C}^\infty$, donc est bien $\mathcal{C}^\infty$.

Test 3. — *Soient $f : I \subset \mathbb{R} \to F$, et $a \in I$. Montrer que f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a et donner le lien entre dérivée et différentielle. Montrer que f' est continue ssi $Df : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ est continue (f est alors par définition $\mathcal{C}^1$).*

Corrigé. f est dérivable en a ssi le rapport $(f(x) - f(a))/(x - a)$ admet une limite (alors notée $f'(a)$) quand $x \to a$. Ce qui équivaut à dire qu'existe p_a de limite nulle en a, telle que $\forall x \in I$, $f(x) - f(a) = (x-a)f'(a) + |x-a|p_a(x)$, c'est-à-dire que la dérivabilité de f en a équivaut à la différentiabilité de f en a, puisque $h \to f'(a).h$ est linéaire continue. On a aussi prouvé que $Df_{(a)}(h) = f'(a).h$. Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ définie par $\Phi(\alpha)(h) = \alpha.h$. Φ est linéaire et continue (puisque $\dim(\mathbb{R}) < \infty$), donc $\mathcal{C}^\infty$. Comme $Df = \Phi \circ f'$, si f' est continue, Df aussi. Réciproquement, Soit $\Psi : \mathcal{L}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\Psi(\mathrm{L}) = \mathrm{L}(1)$. Ψ est linéaire continue, donc $\mathcal{C}^\infty$, et $f' = \Psi \circ Df$. Donc si Df est continue, f' est aussi continue.

Test 4. — *Soient E et F deux evn et $\vec{e} \in E$ un vecteur fixé. Montrer que l'application*

$$\begin{array}{rccl} \Psi_{\vec{e}} : & \mathcal{L}(E; F) & \to & F \\ & \mathrm{L} & \mapsto & \Psi_{\vec{e}}(\mathrm{L}) = \mathrm{L}(\vec{e}) \end{array}$$

est $\mathcal{C}^\infty$. En déduire que si $f : \Omega \subset E \to F$ est $\mathcal{C}^1$, la dérivée directionnelle de f suivant $\vec{e}$, $D_{\vec{e}}f : \Omega \ni x \mapsto D_{\vec{e}}f_{(x)} \in F$ est continue.

Corrigé. $\Psi_{\vec{e}}$ est linéaire et $||\Psi_{\vec{e}}(\mathrm{L})|| \leq ||\mathrm{L}(\vec{e})|| \leq ||\mathrm{L}||.||\vec{e}||$, puisque L est linéaire continue. Ce qui prouve que $\Psi_{\vec{e}}$ est continue (et $||\Psi_{\vec{e}}|| \leq ||\vec{e}||$). $\Psi_{\vec{e}}$ est donc $\mathcal{C}^\infty$. Or $D_{\vec{e}}f = \Psi_{\vec{e}} \circ Df$, donc si Df est continue, $D_{\vec{e}}f$ aussi.

Problème - Géométrie du graphe d'une application différentiable.

Soit E un espace vectoriel normé réel, Ω un ouvert de E, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \dashrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $F = E \times \mathbb{R}$, on munit F de la norme $||(x,t)|| = \max(\{||x||_E, |t|\})$. Enfin on note $\Gamma = \{(y,t) \in \Omega \times \mathbb{R};\ t = f(y)\}$. Dans tout le problème on aura intérêt à illustrer les différentes questions par des dessins.

1- Montrer que $\varphi : u \ni \Omega \longrightarrow \varphi(u) = (u, f(u)) \in \Gamma$ est un homéomorphisme (Ω et Γ étant munis des topologies induites par celles de E et F respectivement).

Dans la suite, on suppose f différentiable en a.

2.a- Montrer que le graphe T dans F de l'application:

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{L} & : & E & \longrightarrow & F \\ & & h & \longrightarrow & \mathrm{L}(h) = f(a) + Df_{(a)}(h-a) \end{array}$$

est un hyperplan affine passant par $(a, f(a))$. C'est-à-dire qu'il existe un hyperplan $H \subset F$ tel que $T = (a, f(a)) + H$. Donner l'une des formes linéaires θ dont H est le noyau. Montrer que θ est continue. T est appelé le plan tangent à Γ en $(a, f(a))$.

2.b- Dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$, donner l'équation de T dans $\mathbb{R}^3$ à l'aide de $D_{\vec{e}_1} f_{(a)}$ et $D_{\vec{e}_2} f_{(a)}$.

2.c- On note $A = (a, f(a))$, $M = (u, f(u))$ et $P = (u, L(u))$, pour tout $u \in \Omega$.
Montrer que:

$$\lim_{a \neq u \to a} \frac{||\overrightarrow{PM}||}{||\overrightarrow{AM}||} = \lim_{a \neq u \to a} \frac{||\overrightarrow{PM}||}{||\overrightarrow{AP}||} = 0, \lim_{a \neq u \to a} \frac{||\overrightarrow{AP}||}{||\overrightarrow{AM}||} = 1 \tag{1}$$

2.d- Soit $\vec{b}$ un vecteur de F n'appartenant pas à H. Montrer que l'on obtient des propositions vraies en remplaçant dans (1) le point P par la projection Q de M sur T parallèlement à $\vec{b}$. (On comparera $||\overrightarrow{PM}||$ à $||\overrightarrow{QM}||$ en utilisant θ).

C_ϵ étant l'ensemble des points M de F vérifiant: $||\overrightarrow{QM}|| \leq \epsilon ||\overrightarrow{AQ}||$, pour $\epsilon > 0$ donné, montrer que quel que soit $\epsilon > 0$, il existe $r_\epsilon > 0$ tel que $\Gamma \cap B(A, r_\epsilon) \subset C_\epsilon$ (c'est-à-dire que C_ϵ est un voisinage de A).

3.a- I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et t_0 un point de I, on considère la branche de courbe paramétrée de F définie par une application continue $\gamma : t \ni I \longrightarrow \gamma(t) \in \Gamma$, vérifiant $\gamma(t_0) = A$.
Indiquer comment, grâce à φ, on peut obtenir toutes les applications γ.
Montrer que parmi ces applications γ il en est qui sont dérivables en t_0 et qui vérifient $\gamma'(t_0) \neq 0$.
Montrer que dans ce cas $\gamma'(t_0) \in T$. (Ceci montre que la branche de courbe γ qui est tracée sur Γ et passe par A admet une tangente en ce point qui est incluse dans T.)

3.*b*- Montrer que tout vecteur $\vec{v} \in H$ définit la tangente en A à une courbe paramétrée sur Γ, passant par A.

3.*c*- On considère un ensemble E inclus dans Γ tel que A soit un point non isolé de E. On suppose qu'il existe un vecteur $\vec{v} \neq 0$ de F et une fonction $\Lambda : E \setminus \{A\} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant:

$$\lim_{E \setminus \{A\} \ni M \to A} \Lambda(M) \overrightarrow{AM} = \vec{v},$$

ce qui traduit que la droite AM admet, quand M tend vers A sur E, une position limite D de direction $\vec{v}$, c'est-à-dire que E admet, dans un sens très général, D comme tangente en A.
Montrer que $\vec{v} \in H$, c'est-à-dire que D est incluse dans T.

Exercices et Problèmes - Année 2000-2001

Licence de Mathématiques **Année 2000-2001**
Université de Nice-Sophia Antipolis

Calcul différentiel

Examen partiel du 29 novembre 2000

Durée: 2 heures

Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

On accordera une attention particulière à la qualité de la rédaction. Celle-ci devra être concise mais précise.

Problème I. — Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés (non nécessairement de dimension finie), $\Omega \subset E$ un ouvert de E, et considérons $B : F \times F \to G$ une application bilinéaire continue et $f : \Omega \to F$, $g : \Omega \to F$ deux applications $\mathcal{C}^p$ sur Ω, $p \geq 1$.

Posons:

$$\begin{array}{rccl} \Pi : & \Omega & \to & G \\ & x & \to & \Pi(x) = B(f(x), g(x)) \end{array}$$

1 . – Montrer que Π est de classe p sur Ω.

2 . – Calculer, pour tout $x \in \Omega$ et tout $\vec{h} \in E$, $D\Pi_{(x)}(\vec{h})$.

On suppose désormais que $p \geq 2$.

3 . – Exprimer $D\Pi : \Omega \to \mathcal{L}(E; G)$ à l'aide, entre autres, des applications suivantes:

$$\begin{array}{rrcllcl} B_1 : & F \times \mathcal{L}(E;F) & \to & \mathcal{L}(E;G) & & & \\ & (y, L) & \to & B_1(y, L) : & E & \to & G \\ & & & & \vec{h} & \to & B(y, L(\vec{h})) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} (f, Dg) : & \Omega & \to & F \times \mathcal{L}(E;F) \\ & x & \to & (f(x), Dg_{(x)}) \end{array}$$

4 . – Montrer que $B_1 : F \times \mathcal{L}(E;F) \to \mathcal{L}(E;G)$ est bilinéaire continue.

5 . – En déduire, pour tout $x \in \Omega$ et tout $\vec{h}, \vec{k} \in E$, $D^2\Pi_{(x)}(\vec{h})(\vec{k})$.

6 . – Retrouver, lorsque $E = F = G = \mathbb{R}$, à l'aide de la question 5, la formule bien connue:

$$(f.g)'' = f''.g + 2f'.g' + f.g''.$$

Tourner la page s.v.p.

Problème II. — Soit P l'application définie par:

$$\begin{array}{llcl} P: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & \big((\alpha,\beta),x\big) & \to & P\big((\alpha,\beta),x\big) = x^3 + \beta x^2 + \alpha x + 1, \end{array}$$

et posons, pour tout $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $p_a(x) = P\big((\alpha,\beta),x\big) = x^3 + \beta x^2 + \alpha x + 1$.

On se propose dans ce problème, d'étudier les racines du polynôme unitaire de degré trois, p_a, en fonction du paramètre $a = (\alpha, \beta)$. On rappelle le résultat suivant:

R *: la racine x de p_a, est racine multiple de p_a si et seulement si x est aussi racine de p_a'.*

1 . – L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ étant muni d'une norme quelconque, montrer que l'application P est $\mathcal{C}^\infty$.

2 . – Montrer que le polynôme p_a admet soit une unique racine, soit trois racines (éventuellement multiples).

3 . – Quel lien existe-t-il entre $D_2P_{(a,x)}$, la différentielle partielle de P par rapport à la variable x et $p_a'(x)$? En déduire que l'ensemble des points (a,x) de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, identifié avec $\mathbb{R}^3$, tels que $D_2P_{(a,x)}$ n'est pas un isomorphisme linéaire est donné par:

$$\Delta = \{\beta^2 - 3\alpha \geq 0 \text{ et } x = \frac{1}{3}(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 3\alpha})\}$$

et que $(a,x) \in \Delta \cap P^{-1}(\{0\})$ si et seulement si x est racine multiple de p_a.

4 . – On note $\Omega = \{a = (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2;\ \beta^2 < 3\alpha\}$. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit alors $a \in \Omega$. Montrer qu'il existe un réel x tel que $p_a(x) = 0$, et que pour un tel x, il existe un voisinage ouvert Ω_a de a dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, un voisinage ouvert Ω_x de x dans $\mathbb{R}$ et une application $\mathcal{C}^\infty$:

$$\varphi : \Omega_a \to \Omega_x$$

tels que, pour tout $(a',x') \in \Omega_a \times \Omega_x$, $p_{a'}(x') = 0 \Longleftrightarrow x' = \varphi(a')$.

5 . – Soit $a \in \Omega$. Montrer que si p_a possède trois racines x_1, x_2 et x_3, celles-ci sont distinctes et qu'il existe un voisinage ouvert Ω_a de a dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, trois voisinages ouverts $\Omega_{x_1}, \Omega_{x_2}$ et Ω_{x_3} respectivement de x_1, x_2 et x_3 dans $\mathbb{R}$, deux à deux disjoints, et trois applications C^∞:

$$\varphi_1 : \Omega_a \to \Omega_{x_1}; \quad \varphi_2 : \Omega_a \to \Omega_{x_2}; \quad \varphi_3 : \Omega_a \to \Omega_{x_3}$$

tels que, pour tout $(a',x') \in \Omega_a \times \Omega_{x_1}$ (resp. $(a',x') \in \Omega_a \times \Omega_{x_2}$, $(a',x') \in \Omega_a \times \Omega_{x_3}$), $p_{a'}(x') = 0 \Longleftrightarrow x' = \varphi_1(a')$ (resp. $x' = \varphi_2(a')$, $x' = \varphi_3(a')$).

(∗) **6 .** – Déduire des deux questions précédentes que le nombre de racines $\nu(a)$ de p_a est localement constant sur Ω et que $\nu : \Omega \to \{1,3\} \in \mathbb{R}$ est différentiable. Calculer $D\nu_{(a)}$. En remarquant que Ω est convexe, prouver que le nombre de racines de p_a, pour $a \in \Omega$ est constant.

7 . – En considérant $p_a(x) = (x^2+x+1)(x+1)$, montrer que pour tout $a \in \Omega$, p_a possède une seule racine réelle.

(∗) **Question subsidiaire.** – Considérons $\mathcal{O}_1 = \{a \in \mathbb{R}^2;\ p_a \text{ admet une unique racine }\}$ et $\mathcal{O}_3 = \{a \in \mathbb{R}^2;\ p_a \text{ admet trois racines distinctes }\}$. Montrer que $\mathcal{O}_3$ et $\mathcal{O}_1$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_3$ est dense dans $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire que l'ensemble des paramètres $a \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels p_a admet une racine multiple est un fermé d'intérieur vide de $\mathbb{R}^2$).

Calcul différentiel - Examen du 25 février 2001
Durée approximative: 1 heure

(1 pt) **Question de cours.** — Énoncer le théorème de la moyenne.

Problème . — Soient $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^1$.

(1 pt) **1 .** – On considère les applications suivantes:

$$\begin{array}{rrcl} F: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \to & F(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x,y,z)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{et } \widetilde{F}: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,(y,z)) & \to & \widetilde{F}(x,(y,z)) = F(x,y,z). \end{array}$$

Quelle sont les classes de F et de $\widetilde{F}$?

(1 pt) **2 .** – Donner les matrices associées à $DF_{(a,b,c)}$ et $D_2\widetilde{F}_{(a,(b,c))}$.

(1 pt) **3 .** – Soit $M = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $F(M) = (0,0)$ et soit $C = F^{-1}(\{(0,0)\}) = f^{-1}(\{0\}) \cap g^{-1}(\{0\})$.
Énoncer le théorème de la fonction implicite pour $\widetilde{F}$ en $(a,(b,c))$.

(1 pt) **4 .** – En déduire une condition suffisante $(\mathcal{S})$, sur les vecteurs $\overrightarrow{grad}f_{(M)} = (\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z})(M)$ et $\overrightarrow{grad}g_{(M)} = (\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial z})(M)$, pour que C soit localement en M le graphe d'une application $\mathcal{C}^1$,

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \to & \varphi(x) = (y,z). \end{array}$$

Dans la suite on supposera que la condition $(\mathcal{S})$ est vérifiée.

5 . – On rappelle que l'espace tangent $\mathrm{T}_M\Sigma$ à un ensemble $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ et en un point $M \in \Sigma$ est l'ensemble des droites affines de $\mathbb{R}^3$ passant par M et obtenues comme limites des droites passant par M et M_p, où $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Σ tendant vers M ($M_p \neq M$).

Remarque: Dès que M n'est pas un point isolé de Σ, $\mathrm{T}_M\Sigma$ contient nécessairement (au moins) une droite.

(1 pt) **5.a .** – Montrer que $\mathrm{T}_M C \subset \mathrm{T}_M f^{-1}(\{0\}) \cap \mathrm{T}_M g^{-1}(\{0\})$.

(1 pt) **5.b .** – On admet que $\mathrm{T}_M f^{-1}(\{0\})$ (resp. $\mathrm{T}_M g^{-1}(\{0\})$) est le plan de $\mathbb{R}^3$ passant par M et orthogonal à $\overrightarrow{grad}f_{(M)}$ (resp. $\overrightarrow{grad}g_{(M)}$).
Montrer que $\mathrm{T}_M C = \mathrm{T}_M f^{-1}(\{0\}) \cap \mathrm{T}_M g^{-1}(\{0\})$.
(Ind. Montrer grâce à $(\mathcal{S})$ que $(\overrightarrow{grad}f^{\perp}_{(M)}) \cap (\overrightarrow{grad}g^{\perp}_{(M)})$ est une droite de $\mathbb{R}^3$, et montrer grâce à **4** que M n'est pas un point isolé de C. Utiliser alors la remarque et **5.a**.)

(2 pts) **Question subsidiaire.** – Interpréter géométriquement le théorème de la fonction implicite pour $\widetilde{F}$ en $(a,(b,c))$ en montrant que $(\mathcal{S})$ évite à la droite $\mathrm{T}_M C$ une certaine position relativement à la droite $\{(x,0,0); x \in \mathbb{R}\}$.

Licence de Mathématiques **Année 2000-2001**
Université de Nice-Sophia Antipolis

Calcul différentiel

Examen du 10 septembre 2001 - Durée: 1h30

Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé. On accordera une attention particulière à la qualité de la rédaction. Celle-ci devra être concise mais précise.

Exercice I

1 . – Soit $(E, || \, ||)$ un espace vectoriel normé et $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue. Montrer que B est différentiable et calculer sa différentielle (On rappelle que lorsque la norme de E est $|| \, ||_E$, la norme choisie sur $E \times E$ est $||(h,k)||_{E\times E} = \max(||h||_E, ||k||_E)$).

2. – Comparer les notions de dérivabilité et de différentiabilité pour une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sans faire de preuve). Lorsque $F'(x)$ et $DF_{(x)}$ existent toutes les deux, donner la relation qui les lie (toujours sans preuve).

3 . – On suppose maintenant que la norme $|| \, ||$ de E est issue d'un produit scalaire, c'est-à-dire que $(E, (\, | \,))$ est un espace préhilbertien réel et que quel que soit $x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$. Soit alors $f : \mathbb{R} \to E$ une application différentiable qui ne s'annule pas. Montrer que

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \to & F(t) = ||f(t)|| \end{array}$$

est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice II

1 . – Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = y^2 - 4x^2(z - x^2)$. On note Σ le lieu des point(x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(x,y,z) = 0$. Représenter Σ. *(ind. On pourra représenter une courbe de niveau de Σ, donnée par $\Sigma \cap \Pi_{z_0}$, où Π_{z_0} est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = z_0$, avec $z_0 \geq 0$, ce qui revient à étudier la fonction $y = +$ ou $- 2x\sqrt{z_0 - x^2}$. On pourra de plus représenter la trace de Σ dans le plan de coordonnées $y = 0$).*

2 . – Montrer grâce au théorème de la fonction implicite que le lieu des points Σ_x de Σ au voisinage desquels Σ n'est pas le graphe d'une application $\varphi : \mathbb{R}^2 \ni (y,z) \to x = \varphi(y,z) \in \mathbb{R}$ est inclus dans $P_x = \{(x,y,z) \in \Sigma; \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0\}$.

3 . – Montrer réciproquement, grâce à la représentation de Σ obtenue à la première question, qu'au voisinage d'un point de P_x, Σ ne peut-être le graphe d'une application du type $\varphi : \mathbb{R}^2 \ni (y,z) \to x = \varphi(y,z) \in \mathbb{R}$. En déduire que $\Sigma_x = P_x$.

4 . – Soit

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \to & F(x,y,z) = (X = f(x,y,z), Y = y, Z = z) \end{array}$$

et (x_0, y_0, z_0) un point de $\Sigma \setminus P_x$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de (x_0, y_0, z_0) dans $\mathbb{R}^3$ et un voisinage ouvert Ω de $F(x_0, y_0, z_0)$ dans $\mathbb{R}^3$ tels que $F_{|\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \Omega$ soit un difféomorphisme de $\mathcal{O}$ sur Ω, vérifiant $F(\Sigma \cap \mathcal{O}) = \Omega \cap \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3; X = 0\}$.

Exercices et Problèmes - Année 2001-2002

Calcul différentiel

Examen partiel du 29 novembre 2001 - Durée: 2h

Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé. On accordera une attention particulière à la qualité de la rédaction. Celle-ci devra être concise mais précise.

Exercice I

Soit $E = \mathcal{C}^1_0([0;1];\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, dérivables sur $[0;1]$, à dérivée continue sur $[0;1]$ et telles que $f(0) = 0$. On note pour tout $f \in E$, $||f||_E = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Soit $F = \mathcal{C}^0([0;1];\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications $g : [0;1] \to \mathbb{R}$, continues sur $[0;1]$. On note pour tout $g \in F$, $||g||_F = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$.

On admettra que $(E, ||\ ||_E)$ et $(F, ||\ ||_F)$ sont deux espaces de Banach.

1. −Soit $\mathrm{L} : E \to F$ l'application définie par $\mathrm{L}(f) = f'$. Montrer que L est une application $\mathcal{C}^\infty$ et donner pour tout $f, h \in E$, $D\mathrm{L}_{(f)}(h)$.

2. − Soit
$$\begin{array}{rccl} B: & F\times F & \to & F \\ & (u,v) & \mapsto & B(u,v) = u.v : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & (u.v)(x) = u(x).v(x). \end{array} \end{array}$$

Montrer que B est une application $\mathcal{C}^\infty$ et donner sans preuve $DB_{(u,v)}(h,k)$, pour tout $u, v, h, k \in F$.

3. − Déduire des questions précédentes que
$$\begin{array}{rccl} \varphi: & E & \to & F \\ & f & \mapsto & \varphi(f) = f'^2 \end{array}$$
est une application $\mathcal{C}^\infty$ et calculer, pour tout $f, h \in E$, $D\varphi_{(f)}(h)$.

4. − Soit $\Phi : E \to F$ l'application définie par $\Phi(f) = f'^2 + f$. Montrer que Φ est une application $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $D\Phi_{(f)}(h)$, pour tout $f, h \in E$.

5 . − Soit $\Omega = \{f \in E; f'(t) \neq 0,\ \forall t \in [0;1]\}$. Montrer que Ω est un ouvert de E.

6 . − **6.a.** Montrer que quel que soit $f \in \Omega$, $D\Phi_{(f)} : E \to F$ est bijective.
(ind. On pourra utiliser sans preuve le théorème suivant:
Théorème 1: Quels que soient $a, b \in F$, l'équation différentielle linéaire $\mathcal{L}_{(a,b)}$: $h' + a.h = b$ admet une unique solution h dans E.)
6.b. Montrer que $D\Phi_{(f)} \in \mathcal{I}som(E;F)$, en utilisant sans preuve le théorème suivant:
Théorème 2: *Si E et F sont deux espaces de Banach, et si $u \in \mathcal{L}(E;F)$ est bijective, alors $u^{-1} \in \mathcal{L}(F;E)$.*

7 . − Soit $f_0 \in \Omega$ et $g_0 = \Phi(f_0) = f_0'^2 + f_0 \in F$. Montrer, grâce au theéorème d'inversion locale, qu'existent Ω_{g_0} un voisinage ouvert de g_0 dans F et Ω_{f_0} un voisinage ouvert de f_0 dans E, tels que pour tout $g \in \Omega_{g_0}$ l'équation différentielle $\mathcal{E}_g$: $f'^2 + f = g$ admette une unique solution $f \in \Omega_{f_0}$.

Exercice II

1 . – Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = 2yz - x^3 + 3xz^2$.
On note Σ le lieu des points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = 0$.
Pour une constante $z_0 \in \mathbb{R}$, représenter $\Sigma \cap \Pi_{z_0}$, où Π_{z_0} est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = z_0$. En déduire l'allure de Σ.

2 . – Montrer que $\Sigma_{z\neq 0} = \{(x, y, z) \in \Sigma;\ z \neq 0\}$ est le graphe d'une application $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi_y : \Omega \ni (x, z) \to y = \varphi_y(x, z) \in \mathbb{R}$, , où Ω est l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ rapporté aux coordonnées x, z et défini par $\Omega = \{(x, z);\ z \neq 0\}$.

3 . – On note $P_x = \{(x, y, z) \in \Sigma;\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0\}$. Montrer grâce au théorème de la fonction implicite que le lieu des points Σ_x de Σ au voisinage desquels Σ n'est pas le graphe d'une application $\varphi_x : \mathbb{R}^2 \ni (y, z) \to x = \varphi_x(y, z) \in \mathbb{R}$ est inclus dans P_x (ou encore que si $A \in \Sigma$ n'est pas dans P_x, Σ est localement en A le graphe d'une application du type φ_x).

4 . – Montrer réciproquement, grâce à la représentation de Σ obtenue à la première question, qu'au voisinage d'un point de P_x, Σ ne peut-être le graphe d'une application du type $\varphi_x : \mathbb{R}^2 \ni (y, z) \to x = \varphi_x(y, z) \in \mathbb{R}$. En déduire que $\Sigma_x = P_x$.

5 . – Soit

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \to & F(x, y, z) = (X = f(x, y, z), Y = y, Z = z) \end{array}$$

et (x_0, y_0, z_0) un point de $\Sigma \setminus P_x$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de (x_0, y_0, z_0) dans $\mathbb{R}^3$ et un voisinage ouvert Ω de $F(x_0, y_0, z_0)$ dans $\mathbb{R}^3$ tels que $F_{|\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \Omega$ soit un difféomorphisme de $\mathcal{O}$ sur Ω, vérifiant $F(\Sigma \cap \mathcal{O}) = \Omega \cap \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3; X = 0\}$.

Calcul différentiel - Examen du 24 janvier 2002

Durée approximative: 1h45

Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

(2 pt) **Question de cours.** — Énoncer le théorème de Schwarz.

Problème . — Le but de ce problème est de prouver le théorème fondamental de l'algèbre:

"Tout polynôme complexe non constant admet une racine".

I. – Nous noterons classiquement, pour tout nombre complexe $h = u + iv$, $|h| = \sqrt{u^2+v^2}$ le module de h, et $\mathrm{Re}[h] = u$, $\mathrm{Im}[h] = v$, respectivement les parties réelle et imaginaire de h.

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$ tout entier, c'est-à-dire (par définition) telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ existent un nombre complexe, noté $f'(z)$, et une fonction $\epsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de limite nulle en 0, tels que:

$$\forall h \in \mathbb{C}, \quad f(z+h) - f(z) = f'(z) \cdot h + |h| \cdot \epsilon(h). \qquad (*)$$

On note $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par:

$$\forall z = x+iy \in \mathbb{C}, \quad \widetilde{f}(x,y) = (p(x,y) = \mathrm{Re}[f(z)], q(x,y) = \mathrm{Im}[f(z)]) \in \mathbb{R}^2.$$

(1 pt) **1 .** – Rappelez la définition de la différentiabilité de $\widetilde{f}$ en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(2 pt) **2 .** – En prenant les parties réelles et imaginaires des deux membres de $(*)$, montrer que la $\mathbb{C}$-différentiabilité de f en $z = x+iy \in \mathbb{C}$ implique la différentiabilité de $\widetilde{f}$ en (x,y), et que de plus:

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x,y) = \mathrm{Re}[f'(z)], \quad \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) = -\mathrm{Im}[f'(z)]$$
$$\frac{\partial q}{\partial x}(x,y) = \mathrm{Im}[f'(z)], \quad \frac{\partial q}{\partial y}(x,y) = \mathrm{Re}[f'(z)]$$

(2 pt) **3 .** – Déduire de I.2 que l'ensemble $S_{\widetilde{f}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; D\widetilde{f}_{(x,y)}$ n'est pas inversible$\}$ est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \ f'(x+iy) = 0\}$.

II. – On suppose à partir de maintenant que f est un polynôme non constant de $\mathbb{C}[z]$.

(2 pt) **1 .** – Montrer (grâce à la question précédente) que $S_{\widetilde{f}}$ et $\Delta_{\widetilde{f}} = \widetilde{f}(S_{\widetilde{f}})$ sont des ensembles finis de $\mathbb{R}^2$. En déduire que $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta_{\widetilde{f}}$ est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$.

(3 pt) **2 .** – Montrer que $\widetilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$. Soit $u \in \mathbb{R}^2$ et $v = \widetilde{f}(u)$. Montrer que si $v \in \Omega$, il existe un voisinage $\mathcal{O}_u$ de u dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage $\mathcal{O}_v$ de v dans $\mathbb{R}^2$, tels que quel que soit $t \in \mathcal{O}_v$, l'équation $t = \widetilde{f}(s)$ admet une unique solution s dans $\mathcal{O}_u$. En déduire que $\Omega \cap \widetilde{f}(\mathbb{R}^2)$ est ouvert.

(3 pt) **3 .** – Soit maintenant $v \in \Omega$, mais contrairement à la question précédente, on suppose que v n'a pas d'antécédent par $\widetilde{f}$. Le but de cette question est de prouver que les t dans un voisinage de v, n'ont pas non plus d'antécédent par $\widetilde{f}$; c'est-à-dire que $\Omega \setminus \widetilde{f}(\mathbb{R}^2)$ est ouvert.
On raisonne par l'absurde: supposons qu'existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ de limite v, et que $v_n = \widetilde{f}(u_n)$.

3.a. – Montrer que nécessairement $\lim_{n\to\infty} |u_n| = +\infty$ (ind. Si tel n'est pas le cas, extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergeant vers $u \in \mathbb{R}^2$ et remarquer que $\widetilde{f}(u) = v$.)

3.b. – Déduire de $\lim_{n\to\infty} |u_n| = +\infty$ que $\lim_{n\to\infty} |v_n = \widetilde{f}(u_n)| = +\infty$.

(2 pt) **4 .** – Montrer à l'aide des questions II.1, II.2 et II.3 que:
- soit tout élément de Ω possède (au moins) un antécédent par $\widetilde{f}$,
- soit tout élément de Ω ne possède pas d'antécédent par $\widetilde{f}$.

(2 pt) **5 .** – Notons que les points de $\Delta_{\widetilde{f}} = \widetilde{f}(S_{\widetilde{f}})$ ont par définition des antécédents par $\widetilde{f}$.
Montrer que $\widetilde{f}(\mathbb{R}^2) \neq \Delta_{\widetilde{f}}$. Déduire de la question précédente que $\widetilde{f}$ est surjectif.

(1 pt) **6 .** – Conclure en montrant que f possède (au moins) une racine.

(2 pt) **Question subsidiaire.** – Montrer qu'en réalité, quel que soit $v \in \Omega$, le nombre d'antécédents de v par $\widetilde{f}$ est constant.

Exercices et Problèmes - Année 2002-2003

Licence de Mathématiques
Université de Nice-Sophia Antipolis

Année 2002-2003

Calcul différentiel - Examen partiel du 21 novembre 2002

Durée : 2 heures

Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

On accordera une attention particulière à la qualité de la rédaction qui devra être concise et précise.

Questions de cours. — Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, Ω, $\mathcal{U}$ deux ouverts non vides respectivement de E et F.

(1 pt) **1.** – On suppose **dans cette question** que $\dim(E) < \infty$. Relier les trois propositions suivantes par les symboles $\Longrightarrow$ et $\not\Longleftarrow$ (l'écriture $A \not\Longleftarrow B$ signifie "des contre-exemples montrent que A n'implique pas B") :

A : L'application $f : \Omega \to F$ est différentiable sur Ω.

B : L'application $f : \Omega \to F$ admet des dérivées directionnelles $D_{\vec{h}} f_{(x)}$ en tous les points x de Ω, suivant tous les vecteurs $\vec{h}$ de E, et $\vec{h} \mapsto D_{\vec{h}} f_{(x)}$ est linéaire et continue, quel que soit $x \in \Omega$.

C : Une base $\mathcal{B}$ de E étant choisie, l'application $f : \Omega \to F$ admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ en tous les points x de Ω, suivant toutes les coordonnées x_j et les dérivées partielles $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ sont continues sur Ω.

(1 pt) **2.** – Donner la définition d'un difféomorphisme f de Ω sur $\mathcal{U}$.
Soit $f : \Omega \to \mathcal{U}$ un difféomorphisme. On suppose que f est $\mathcal{C}^k$ sur Ω ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). L'application $f^{-1} : \mathcal{U} \to \Omega$ est-elle $\mathcal{C}^k$?

(1 pt) **3.** – Énoncer le théoréme de la moyenne.

Les exercices I et II sont indépendants

Exercice I . — Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On note, $\forall f, g \in E$, $f \cdot g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall t \in [0,1]$, $(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t)$.

(3 pts) **1 .** – On considère les applications $\mathfrak{B}$, Δ et $\mathfrak{b}$ définies de la façon suivante :

$$\mathfrak{B} : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (f,g) & \mapsto & \mathfrak{B}(f,g) = f \cdot g \end{array} \qquad \Delta : \begin{array}{ccc} E & \to & E \times E \\ f & \mapsto & \Delta(f) = (f,f) \end{array}$$

Montrer que $\mathfrak{B}$ et Δ sont $\mathcal{C}^\infty$ (la norme de $E \times E$ est : $\forall (f,g) \in E \times E, \|(f,g)\|_{E\times E} = \max(\|f\|_\infty, \|g\|_\infty)$).

(2 pts) **2 .** – Soit $\mathfrak{b}$ l'application définie par :

$$\mathfrak{b} : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & \mathfrak{b}(f) = f^2 \end{array}$$

Exprimer $\mathfrak{b}$ à l'aide de $\mathfrak{B}$ et Δ. Montrer que $\mathfrak{b}$ est $\mathcal{C}^\infty$ puis calculer quel que soit $f \in E$, quel que soit $h \in E$, $D\mathfrak{b}_{(f)}(h)$.

Soit $g : [0,1] \to [0,1]$ **un élément de** E **que l'on considére fixée dans la suite.**

(2 pts) **3 .** −On définit :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{L}: & E & \to & E \\ & f & \mapsto & \mathrm{L}(f) = f \circ g \end{array}$$

Montrer que l'application L est $\mathcal{C}^\infty$.

(3 pts) **4 .** −Soit $\beta : E \times E \to E$ une application bilinéaire continue. On considére l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & E & \to & E \\ & f & \mapsto & \beta(f \circ g, f^2). \end{array}$$

Exprimer Φ en fonction de β, L et $\mathfrak{b}$.
Montrer que Φ est $\mathcal{C}^\infty$ et calculer, quel que soit $f \in E$, quel que soit $h \in E$, $D\Phi_{(f)}(h)$.

À partir de maintenant on suppose que $\beta = \mathfrak{B}$.

(5 pts) **5 .** −Soit Ψ et φ les applications définies par :

$$\begin{array}{rccl} \Psi: & E & \to & \mathcal{L}(E;E) \\ & f & \mapsto & \Psi(f): \begin{array}{ccl} E & \to & E \\ h & \mapsto & [\Psi(f)](h) = 2.h.(f\circ g) + (h \circ g).f \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & E \times \mathcal{L}(E;E) & \to & \mathcal{L}(E;E) \\ & (f,\ell) & \mapsto & \varphi(f,\ell): \begin{array}{ccl} E & \to & E \\ h & \mapsto & [\varphi(f,\ell)](h) = f.\ell(h) \end{array} \end{array}$$

Montrer que Ψ et φ sont deux applications $\mathcal{C}^\infty$.
Montrer que $D\Phi = \varphi \circ (\mathrm{Id}_E, \Psi)$.
En déduire, quel que soit $f \in E$, quel que soit $h, k \in E$, $D^2\Phi_{(f)}(h,k)$.

Exercice II. – Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a_0 = a, a_1, \cdots, a_p = b$, un nombre fini de points de Ω tels que les segments $[a_j, a_{j+1}]$ soient inclus dans Ω, quel que soit $j \in \{0, \cdots, p-1\}$. On dit que la courbe $\ell(a, a_1, \cdots, b)$ de Ω constituée des segments $[aj, a_{j+1}]$, $j \in \{0, \cdots, p-1\}$, ie $\ell(a_0, a_1, \cdots, a_p) = \bigcup_{j=0}^{p-1} [a_j, a_{j+1}]$, est une *ligne brisée* de Ω joignant a et b. On fixe une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{R}^n$ et on note $|\ell(a, a_1, \cdots, b)| = \sum_{j=0}^{p-1} \|a_{j+1} - a_j\|$, la longueur de la ligne brisée $\ell(a_0, a_1, \cdots, a_p)$.

(2 pts) **1 .** −Soit $a \in \Omega$. On note $\mathcal{C}_a$ l'ensemble des points de Ω qui peuvent être joints à a par une ligne brisée.
Autrement dit $\mathcal{C}_a$ est la classe d'équivalence de a par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ suivante :
$\forall x, y \in \Omega$, $x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow$ il existe une ligne brisée joignant x et y.
Montrer que $\mathcal{C}_a$ est un ouvert de Ω.

(2 pts) **2 .** −Soient $a \in \Omega$ et $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_a$. On note $d(\alpha, \beta) = \inf(\mathrm{L}_{\alpha,\beta})$, où $\mathrm{L}_{\alpha,\beta} \subset \mathbb{R}_+$ est l'ensemble des longueurs des ligne brisées de $\mathcal{C}_a$ joignant α et β. Soit F un espace vectoriel normé et $f : \Omega \to F$ une application différentiable sur Ω. Montrer grâce au théorème de la moyenne que :

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\|_F \leq \sup_{\xi \in \mathcal{C}_a} \|Df_{(\xi)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;F)} \cdot d(\alpha, \beta).$$

Licence de Mathématiques
Université de Nice-Sophia Antipolis **Année 2002-2003**

Calcul différentiel - Examen du 6 février 2003
Durée : 4 heures

Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

On accordera une attention particulière à la qualité de la rédaction qui devra être concise et précise.

Questions de cours.

(1 pt) **1 .** −Énoncer le théorème de la moyenne.

(1 pt) **2 .** −Énoncer le théorème d'inversion locale et le théorème d'inversion globale.

(1 pt) **3 .** −Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice I . — Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On admettra que $(E, \|\ \|)$ est un espace **complet**. On note, pour $n \in \mathbb{N}, f \in E$, $f^n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall t \in [0,1]$, $f^n(t) = f(t)\cdots f(t)$ (le produit de $f(t)$ avec lui-même n fois). On convient que f^0 est la fonction de E qui vaut constamment 1.

(1 pt) **1 .** −Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit Π_n l'application définie par :

$$\Pi_n : \begin{array}{rcl} E^n & \to & E \\ (f_1,\cdots,f_n) & \mapsto & \Pi_n(f_1,\cdots,f_n) = f_1\cdots f_n \end{array}$$

Dire (sans preuve) pourquoi Π_n est $\mathcal{C}^\infty$ et donner (sans calcul) sa différentielle.

(1 pt) **2 .** −Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère les applications F_n et G_n définies de la façon suivante :

$$F_n : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ f & \mapsto & F_n(f) = \sin\circ f^n \end{array} \qquad G_n : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ f & \mapsto & G_n(f) = \cos\circ f^n \end{array}$$

Montrer que F_n et G_n sont différentiables et calculer leur différentielle.

(1 pt) **3 .** −Soit Φ l'application définie par :

$$\Phi : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathcal{L}(E;E) \\ f & \mapsto & \Phi(f) : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ h & \mapsto & \Phi(f)(h) = f\cdot h \end{array} \end{array}$$

Montrer que Φ est $\mathcal{C}^\infty$.

(1 pt) **4 .** −Exprimer les différentielles $DF_n : E \to \mathcal{L}(E;E)$ et $DG_n : E \to \mathcal{L}(E;E)$ de F_n et G_n en fonction de Φ, Π_n, G_n et F_n.
En déduire que F_n et G_n sont $\mathcal{C}^\infty$.

(1 pt) **5 .** −Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit B_R la boule ouverte de E de centre 0 et de rayon R.
Montrer que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \le |x|$.
En déduire que quel que soit $f \in B_R$, la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n F_n(f)$ définit une fonction $S(f)$ de E.

(1 pt) **6 .** −Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $f \in E$, majorer $\|DF_{n(f)}\|$. En déduire que $S : E \to E$ est $\mathcal{C}^1$, et donner, pour $f \in E$, $DS_{(f)}$.

Problème

Les parties I et II sont liées mais indépendantes.

Partie I . — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^3 + 2x^2y - x^4$. On note V le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par : $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x,y) = 0\}$.

(1 pt) **1 .** −En posant $z = x^2$, montrer que $(x,y) \in V$ équivaut à $z = y(1 + \sqrt{1+y})$.
En déduire que $\{(x,y) \in V ; x \geq 0\}$ et $\{(x,y) \in V ; x \leq 0\}$ sont respectivement les graphes de deux applications continues

$$\begin{array}{rccc} \psi_+ : & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ & y & \mapsto & x = \psi_+(y) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \psi_- : & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R}_- \\ & y & \mapsto & x = \psi_-(y), \end{array}$$

$\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Montrer que les dérivées ψ'_+ et ψ'_- de ψ_+ et ψ_- vérifient : $\lim\limits_{y\to 0^+} \psi'_+(y) = +\infty$ et $\lim_{y\to 0^+} \psi'_-(y) = -\infty$.

(1 pt) **2 .** −Montrer que $\psi_+(0) = \psi_-(0) = 0$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} \psi_-(y) = -\infty$, $\lim\limits_{y\to+\infty} \psi_+(y) = +\infty$.
En déduire que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $y_x \in \mathbb{R}$, tel que $(x, y_x) \in V$.
Montrer que ψ_- et ψ_+ sont strictement croissantes. En déduire que y_x est unique.

On note alors φ l'application $\mathbb{R} \ni x \mapsto y_x \in \mathbb{R}_+$.

Montrer que $\varphi_+ : \mathbb{R}_+ \ni x \mapsto y_x \in \mathbb{R}_+$ est bijective, d'inverse ψ_+, et $\varphi_- : \mathbb{R}_- \ni x \mapsto y_x \in \mathbb{R}_+$ est bijective, d'inverse ψ_-.

(1 pt) **3 .** −Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $y_x = \varphi(x) \in \mathbb{R}$ défini par la question précédente. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert I_x de x dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, un voisinage ouvert I_{y_x} de y_x dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tels que : $\varphi_{|I_x} : I_x \to I_{y_x}$ soit $\mathcal{C}^\infty$.
En déduire que φ est une application $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, et déduire de la question 1 que $\lim\limits_{x\to 0} \varphi'(x) = 0$.

(1 pt) **4 .** −En appliquant le théorème des accroissements finis à φ entre 0 et $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et à l'aide de la question précédente, montrer que φ est dérivable en 0, et que $\varphi'(0) = 0$.
En déduire que V est le graphe d'une application $\mathcal{C}^1$, $\varphi : \mathbb{R} \ni x \mapsto y \in \mathbb{R}+$.

(1 pt) **5 .** −Le théorème de la fonction implicite assure-t-il que V est localement en 0 le graphe d'une application $\mathcal{C}^1$, $\mathbb{R} \ni x \mapsto y \in \mathbb{R}_+$? Commentez.

Partie II . — Soient $F \in \mathbb{R}[a,b,y]$ le polynôme de trois variables défini par : $F(a,b,y) = y^3 + ay + b$ et $H = \{(a,b,y) \in \mathbb{R}^3 ; F(a,b,y) = 0\}$. On note $F_{a,b}$ le polynôme de $\mathbb{R}[y]$ défini par : $F_{a,b}(y) = F(a,b,y) = y^3 + ay + b$. On note $\mathbb{R}^2_{(a,b)}$ et $\mathbb{R}_y$ les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ rapportés respectivement aux coordonnées (a,b) et y.

Rappel : y_0 est racine multiple du polynôme $P \in \mathbb{R}[y]$ si et seulement si $P(y_0) = P'(y_0)$=0

(1 pt) **1 .** −Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. En considérant que $F_{a,b}$ est de degré 3, montrer que $F_{a,b}$ possède soit 1 racine, soit 3 racines (éventuellement multiples).

(1 pt)

2 . −On note $\Sigma = \{(a,b,y) \in \mathbb{R}^3 ; F'_{a,b}(y) = 0\}$, et $\Delta = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 ; F_{a,b}$ possède une racine multiple$\}$.
Montrer que y_0 est une racine multiple de $F_{a,b}$ si et seulement si $(a,b,y_0) \in H \cap \Sigma$. En déduire que Δ est la projection de $H \cap \Sigma$ sur $\mathbb{R}^2_{(a,b)}$.

(1 pt) **3 .** −Montrer que $\Delta = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2_{(a,b)} ; b = 2(-a/3)^{3/2}\} \cup \{(a,b) \in \mathbb{R}^2_{(a,b)} ; b = -2(-a/3)^{3/2}\}$.
Représenter Δ dans $\mathbb{R}^2_{(a,b)}$. Quel est le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}^2_{(a,b)} \setminus \Delta$?

(1 pt) **4 .** −Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2_{(a,b)}$ tel que $F_{a,b}$ possède trois racines distinctes y_1, y_2, y_3. Noter qu'alors par la question 2, $(a,b) \notin \Delta$.

Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $\Omega_{a,b}$ de (a,b) dans $\mathbb{R}^2_{(a,b)} \setminus \Delta$, trois voisinages ouverts disjoints $I_{y_1}, I_{y_2}, I_{y_2}$ respectivement de y_1, y_2, y_3 dans $\mathbb{R}_y$ et trois applications $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi_1 : \Omega_{(a,b)} \to I_1, \varphi_2 : \Omega_{(a,b)} \to I_2, \varphi_3 : \Omega_{(a,b)} \to I_3$, tels que : $H \cap (\Omega_{(a,b)} \times I_k)$ soit le graphe de φ_k, pour $k = 1,2,3$.
En déduire que pour tout $(\alpha,\beta) \in \Omega_{(a,b)}$, $F_{\alpha,\beta}$ possède trois racines distinctes.

5 . −Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2_{(a,b)}$ tel que $F_{a,b}$ possède une unique racine y_0. Noter qu'alors par la question 2, $(a,b) \notin \Delta$.

(1 pt) **5.a .** $-$Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_{a,b}$ de (a,b) dans $\mathbb{R}^2_{(a,b)} \setminus \Delta$, un voisinage ouvert I_{y_0} de y_0 dans $\mathbb{R}_y$ et une application $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi_0 : \mathcal{U}_{(a,b)} \to I_0$, tels que : $H \cap (\mathcal{U}_{(a,b)} \times I_0)$ soit le graphe de φ_0 (ie que pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathcal{U}_{(a,b)}$, $\varphi_0(\alpha,\beta)$ est une racine de $F_{\alpha,\beta}$).

(1 pt) **5.b.** $-$Puisque par la question précédente, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathcal{U}_{a,b}$, $\varphi(\alpha,\beta)$ est racine de $F_{\alpha,\beta}$, on écrit $F_{\alpha,\beta}(y) = (y - \varphi_0(\alpha,\beta))(y^2 + By + C)$. Montrer que B et C sont des fonctions continues $B(\alpha,\beta)$ et $C(\alpha,\beta)$ de (α,β), ainsi que le discriminant de $(y^2 + By + C)$.
En déduire que pour (α,β) suffisament proche de (a,b), $F_{(\alpha,\beta)}$ possède une unique racine.

(1 pt) **6 .** $-$Soit $\nu : \mathbb{R}^2_{(a,b)} \to \mathbb{N}$, l'application qui associe à chaque (a,b) le nombre de racines de $F_{a,b}$.
Déduire de 4 et 5.b que ν est localement constante sur $\mathbb{R}^2_{(a,b)} \setminus \Delta$, et donc constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}^2_{(a,b)} \setminus \Delta$.

(1 pt) **7 .** $-$Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2_{(a,b)}$ l'arc défini par : $\gamma(x) = (a = 2x^2, b = -x^4)$. Cet arc rencontre-t-il Δ ?
En déduire que $\gamma(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ est contenu dans une composante connexe K de $\mathbb{R}^2_{(a,b)} \setminus \Delta$.
Montrer que sur la composante connexe K de $\mathbb{R}^2_{(a,b)} \setminus \Delta$, ν vaut constamment 1.
Retrouver que l'ensemble V de la partie I est le graphe d'une application $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto y \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$.

Licence de Mathématiques
Université de Nice-Sophia Antipolis **Année 2002-2003**

Calcul différentiel - Examen du 4 septembre 2003

Durée : 4 heures

Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

On accordera une attention particulière à la qualité de la rédaction qui devra être concise et précise.

Questions de cours.

(1 pt) **1 .** −Énoncer le théorème de la moyenne.

(1 pt) **2 .** −Énoncer le théorème d'inversion locale et le théorème d'inversion globale.

(1 pt) **3 .** −Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice I . — Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$. On considère :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \to & E \\ & f & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

I.1- Le but de cette partie est montrer que Φ est différentiable.

(1 pt) **I.1.a-** Soient y et k deux réels et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = \varphi(y+tk) - \varphi(y) - t.k.\varphi'(y)$. Montrer qu'il existe $\xi \in [y, y+k]$ tel que :

$$g(1) - g(0) = \varphi(y+k) - \varphi(y) - k.\varphi'(y) = k.(\varphi'(\xi) - \varphi'(y)) \qquad (*)$$

(0,5 pt) **I.1.b-** Soient f et h dans E et $x \in [0,1]$. Montrer à l'aide de $(*)$ qu'il existe $\xi_x \in [f(x), f(x)+h(x)]$ tel que :

$$\Phi(f+h)(x) - \Phi(f)(x) - h(x).\varphi'(f(x)) = h(x).(\varphi'(\xi_x) - \varphi'(f(x))) \qquad (**)$$

On fixe $f \in E$ et on suppose dorénavant que $\|h\| \leq 1$.

(0,5 pt) **I.1.c-** Montrer qu'il existe un intervalle fermé et borné $I(= I_f)$ tel que :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \in I \text{ et } f(x) + h(x) \in I$$

(1 pt) **I.1.d-** On rappelle qu'une fonction ψ continue sur un intervalle fermé et borné I est uniformément continue sur I, c'est-à-dire que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \text{il existe } \eta > 0 \text{ tel que : } \forall y, \xi \in I, \quad |y - \xi| \leq \eta \Longrightarrow |\psi(\xi) - \psi(y)| \leq \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$. Montrer, grâce à $(**)$, qu'il existe $\eta \in]0,1]$ tel que :

$$\|h\| \leq \eta \Longrightarrow \|\Phi(f+h) - \Phi(f) - h.\varphi' \circ f\| \leq \|h\|.\epsilon$$

(1 pt) **I.1.e-** En déduire que Φ est différentiable et donner $D\Phi_{(f)}$.

I.2- Le but de cette partie est de montrer que si φ est $\mathcal{C}^p$, pour p un entier ≥ 1, alors Φ est aussi C^p.

(1 pt) **I.2.a-** Soit $u \in E$. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{L}(u) : & E & \to & E \\ & h & \mapsto & u.h \end{array}$$

est un élément de $\mathcal{L}(E;E)$. Puis que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{L}: & E & \to & \mathcal{L}(E;E) \\ & u & \mapsto & \mathrm{L}(u) \end{array}$$

est une application $\mathcal{C}^\infty$.

(0,5 pt) **I.2.b-** Exprimer $D\Phi$ à l'aide de L et $\widetilde{\Phi}$, où $\widetilde{\Phi}$ est l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\Phi}: & E & \to & E \\ & f & \mapsto & \varphi' \circ f \end{array}$$

(2 pts) **I.2.c-** En utilisant la continuité uniforme de φ' sur un intervalle fermé borné, montrer que $\widetilde{\Phi}$ est continue. En déduire que :

$$\varphi \text{ est } \mathcal{C}^1 \Longrightarrow \Phi \text{ est } \mathcal{C}^1.$$

Montrer alors par récurrence sur p que la proposition suivante est vraie :

$$\varphi \text{ est } \mathcal{C}^p \Longrightarrow \Phi \text{ est } \mathcal{C}^p.$$

Exercice II . — Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

(1 pt) **II.1-** Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application $A_n : E \to \mathbb{R}$, définie par : $\forall f \in E, A_n(f) = f(0) + n^2$. Montrer que cette application est $\mathcal{C}^\infty$.

(0,5 pt) **II.2-** Montrer que $\Omega = \{f \in E; \forall p \in \mathbb{N}, f(0) + p^2 \neq 0\}$ est un ouvert de E.

(1 pt) **II.3-** Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_n: & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \dfrac{1}{f(0)+n^2} \end{array}$$

Montrer que φ_n est $\mathcal{C}^\infty$ et quels que soient $f \in \Omega, h \in E$ calculer $D\varphi_{n(f)}(h)$.

(1 pt) **II.4-** Montrer que quel que soit $f \in \Omega$, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(f)$ converge vers un réel $\varphi(f)$.

(1 pt) **II.5-** Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \varphi(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(f) \end{array}$$

définie par la question précédente est différentiable.

(0,5 pt) **II.6-** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{L}_k(a): & E \times \cdots \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (h_1, \cdots, h_k) & \mapsto & a.h_1(0) \cdots h_k(0) \end{array}$$

est k-linéaire continue.

(1 pt) **II.7-** On considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{rccc} c_k: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (-1)^k k! x^{k+1} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \mathrm{L}_k: & \mathbb{R} & \to & \mathcal{L}(E,\cdots,E;\mathbb{R}) \\ & a & \mapsto & \mathrm{L}_k(a) \end{array}$$

Montrer que L_k est une application linéaire continue et, par récurrence sur k, que quel que soit $k \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$D^k\varphi_n = \mathrm{L}_k \circ c_k \circ \varphi_n.$$

(1 pt) **II.8-** Montrer, grâce à la question précédente, que φ est une application $\mathcal{C}^\infty$ et que quels que soient $k \geq 1$, $f \in \Omega$, $h_1, \cdots, h_k \in E$:

$$D^k\varphi_{(f)}(h_1,\cdots,h_n) = (-1)^k k! [\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n^2+f(0))^{k+1}}](h_1(0)\cdots h_k(0)).$$

Exercice III . — Soit f l'application définie de la façon suivante :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x^2+y^2+z^2-1, z+y^2-1) \end{array}$$

et $\Gamma = f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^2}\})$.

(1 pt) **III.1-** On note $\mathcal{H}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2-1=0\}$ et $\mathcal{H}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z+y^2-1=0\}$. Représenter $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$.

(1 pt) **III.2-** On note $P=(0,0,1)$, $Q=(0,1,0)$ et $R=(0,-1,0)$. Montrer qu'au voisinage de tous les points (a,b,c) de $\Gamma \setminus \{P,Q,R\}$, Γ est le graphe d'une application $\mathcal{C}^\infty$ du type :

$$\varphi: \begin{array}{rcl} \Omega_y & \to & \Omega_{x,z} \\ y & \mapsto & \varphi(y) = (x(y), z(y)) \end{array}$$

où Ω_y est un voisinage de b dans $O_y = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ et où $\Omega_{x,z}$ est un voisinage de (a,c) dans $O_{x,z} = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$.

(4 pts) **III.3-** Montrer que la projection de Γ sur $O_{x,y} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ est l'ensemble :

$$\Gamma_{x,y} = \{(x,y) \in O_{x,y}; x^2-y^2+y^4=0\},$$

et que la projection de Γ sur $O_{x,z}$ est l'ensemble :

$$\Gamma_{x,z} = \{(x,z) \in O_{x,z}; x^2-z+z^2=0\}.$$

Après avoir fait l'étude des fonctions $y \mapsto \pm\sqrt{y^2-y^4}$ et $x \mapsto \pm\sqrt{z-z^2}$, tracer $\Gamma_{x,y}$ et $\Gamma_{x,y}$.

Tracer enfin Γ. Au voisinage de Q et de R, Γ est-il le graphe d'une application du type de l'application φ de la question 2 ?

(1 pt) **III.4-** Montrer qu'au voisinage de Q et de R, Γ est le graphe d'une application $\mathcal{C}^\infty$ du type :

$$\psi: \begin{array}{rcl} \Omega_x & \to & \Omega_{y,z} \\ x & \mapsto & \psi(x) = (y(x), z(y)) \end{array}$$

où Ω_x est un voisinage de a dans $O_x = \mathbb{R} \times \{0\}\{0\}\times$ et où $\Omega_{y,z}$ est un voisinage de (b,c) dans $O_{y,z} = \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Au voisinage de P, Γ est-il le graphe d'une application du type de l'application φ, ψ ou $\xi : z \mapsto (x(z), y(z))$?

(0,5 pt) **III.5-** Donner l'équation de la droite tangente à Γ en un point $(a,b,c) \neq P$.

Exercices et Problèmes - Année 2003-2004

Calcul différentiel - Examen partiel du 19 novembre 2003
Durée : 2 heures

Questions de cours. — Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, Ω et $\mathcal{U}$ deux ouverts non vides respectivement de E et F.

(1 pt) **1.** – Relier deux à deux les trois propositions suivantes par les symboles $\Longrightarrow$ et $\not\Longleftarrow$ (l'écriture $A \not\Longleftarrow B$ signifie "des contre-exemples montrent que A n'implique pas B") :

A : L'application $f : \Omega \to F$ est différentiable sur Ω.

B : L'application $f : \Omega \to F$ est la restriction à Ω d'une application linéaire et continue.

C : L'application $Df : \Omega \to \mathcal{L}(E;F)$ existe et est la restriction à Ω d'une application linéaire et continue.

(1 pt) **2.** – Énoncer le théorème de Schwarz.

Problème . — *Si on le souhaite, dans la partie II on pourra admettre le résultat de la partie I.*

Partie I . — Soient E un espace vectoriel normé, Ω un ouvert non vide de E, J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contenant $I = [0,1]$, et $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$. À x fixé dans Ω, on considère la quantité $\phi(x) = \displaystyle\int_{[0,1]} f(t,x)\, dt$, qui a un sens puisque $I \ni t \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}$ est continue.
Le but de cette partie est de montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \phi(x) = \displaystyle\int_{[0,1]} f(t,x)\, dt \end{array}$$

est différentiable et que quel que soit $x \in \Omega$, $D\phi_{(x)}(\vec{h}) = \displaystyle\int_{[0,1]} Df_{(t,x)}(0_{\mathbb{R}}, \vec{h})\, dt$.

(1 pt) **I-1.** — Montrer que quel que soit $t \in I$, l'application :

$$\begin{array}{rccl} i : & E & \to & \mathbb{R} \times E \\ & \vec{h} & \mapsto & i(\vec{h}) = (0_{\mathbb{R}}, \vec{h}) \end{array}$$

est $\mathcal{C}^\infty$ (l'espace vectoriel $\mathbb{R} \times E$ étant classiquement muni de la norme $\|(t,x)\|_{\mathbb{R}\times E} = \max\{|t|, \|x\|_E\}$).

Dans la suite de la partie I, x_0 désigne un élément de Ω.

(1 pt) **I-2.** — Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{L} : & E & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{h} & \mapsto & \mathrm{L}(\vec{h}) = Df_{(t,x_0)}(0_{\mathbb{R}}, \vec{h}) \end{array}$$

est $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $D\mathrm{L}_{(\xi)}(\vec{k})$, pour $(\xi, \vec{k}) \in E \times E$.

(1 pt) **I-3.** — Montrer que l'ensemble $\Omega_{x_0} = \{\vec{h} \in E; x_0 + \vec{h} \in \Omega\}$ est un ouvert de E contenant 0_E.
(indication : on pourra considérer l'application $i_{x_0} : E \ni \vec{h} \mapsto x_0 + \vec{h} \in E$)

(2 pts) **I-4.** — Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccl} M : & \Omega_{x_0} & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{h} & \mapsto & M(\vec{h}) = f(t, x_0 + \vec{h}) \end{array}$$

est $\mathcal{C}^1$ et calculer $DM_{(\xi)}(\vec{k})$, pour $(\xi, \vec{k}) \in \Omega_{x_0} \times E$.

(3 pts) **I-5.** — Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_{[t,x_0]}: & \Omega_{x_0} & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{h} & \mapsto & \varphi_{[t,x_0]}(\vec{h}) = f(t, x_0 + \vec{h}) - f(t, x_0) - Df_{(t,x_0)}(0_{\mathbb{R}}, \vec{h}) \end{array}$$

est $\mathcal{C}^1$ et calculer $D[\varphi_{[t,x_0]}]_{(\xi)}(\vec{k})$, pour $(\xi, \vec{k}) \in \Omega_{x_0} \times E$.
En déduire $(t, \xi) \mapsto D[\varphi_{[t,x_0]}]_{(\xi)}$ à l'aide de Df et de l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} R: & \mathcal{L}(\mathbb{R} \times E; \mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}(E; \mathbb{R}) \\ & u & \mapsto & R(u): \quad \vec{h} \mapsto R(u)(\vec{h}) = u(0_{\mathbb{R}}, \vec{h}) \end{array}$$

(2 pts) **I-6.** — Montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccl} I \times \Omega_{x_0} & \to & \mathbb{R} \\ (t, \xi) & \mapsto & \|D[\varphi_{[t,x_0]}]_{(\xi)}\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})} \end{array}$$

est continue en $(t, 0_E)$, quel que soit $t \in I$. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $t \in I$, il existe $\Omega^t_{x_0}$ un voisinage ouvert de 0_E dans Ω_{x_0}, I_t un voisinage ouvert de t dans I tels que :

$$(u, \xi) \in I_t \times \Omega^t_{x_0} \Longrightarrow \|D[\varphi_{[u,x_0]}]_{(\xi)}\| \leq \epsilon.$$

(1 pt) **I-7.** — Soit $\epsilon > 0$. À l'aide de la compacité de I, montrer qu'il existe $\mathcal{U}_{x_0}$ un voisinage (convexe) ouvert de 0_E dans E, tel que :

$$(t, \xi) \in I \times \mathcal{U}_{x_0} \Longrightarrow \|D[\varphi_{[u,x_0]}]_{(\xi)}\| \leq \epsilon$$

À l'aide du théorème de la moyenne appliqué à $\varphi_{[t,x_0]}$ entre 0_E et $\vec{h}$, avec $\vec{h} \in \mathcal{U}_{x_0}$, montrer que :

$$(t, \vec{h}) \in I \times \mathcal{U}_{x_0}, \Longrightarrow |f(t, x_0 + \vec{h}) - f(t, x_0) - Df_{(t,x_0)}(0_{\mathbb{R}}, \vec{h})| \leq \epsilon.\|\vec{h}\|.$$

(1 pt) **I-8.** — Déduire de la question précédente que quel que soit $\epsilon > 0$:

$$\vec{h} \in \mathcal{U}_{x_0} \Longrightarrow |\phi(x_0 + \vec{h}) - \phi(x_0) - \int_{[0,1]} Df_{(t,x_0)}(0_{\mathbb{R}}, \vec{h})\; dt| \leq \epsilon.\|\vec{h}\|.$$

(2 pts) **I-9.** — Conclure grâce à la question précédente, que ϕ est différentiable sur Ω et donner $D\phi_{(x)}(\vec{h})$, pour $(x, \vec{h}) \in \Omega \times E$.

Partie II . — Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0, 0)$, tel que :

$$(x, y) \in \Omega \Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad t \cdot (x, y) \in \Omega,$$

u et v deux applications $\mathcal{C}^1$ sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le but de cette partie est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\text{il existe une application } \mathcal{C}^2, \quad \phi : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ telle que : } \frac{\partial \phi}{\partial x} = u \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial y} = v \qquad (*)$$

(1 pt) **II-1.** — Montrer qu'une condition nécessaire pour que $(*)$ ait lieu est :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \qquad (**)$$

On suppose dorénavant que $(**)$ est vérifiée

(1 pt) **II-2.** — Montrer rapidement que l'application suivante est $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} \times \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & (t, (x, y)) & \mapsto & xu(t \cdot (x, y)) + yv(t \cdot (x, y)) \end{array}$$

(1 pt) **II-3.** — Calculer, quel que soit $(t, (x, y)) \in \mathbb{R} \times \Omega$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, x, y)$.

(1 pt) **II-4.** — Soient $U : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ et $V : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ les applications définies par :

$$U(t, x, y) = tu(tx, ty) \text{ et } V(t, x, y) = tv(tx, ty).$$

Montrer que pour tout $(t, (x, y)) \in \mathbb{R} \times \Omega$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) = \dfrac{\partial U}{\partial t}(t, x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, x, y) = \dfrac{\partial V}{\partial t}(t, x, y)$.

(1 pt) **II-5.** — À l'aide de la partie I, montrer que l'application $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \Omega,\ \ \phi(x, y) = \int_{[0,1]} f(t, (x, y))\ dt$$

est différentiable sur Ω.

(1 pt) **II-6.** — À l'aide de la question I-9, calculer $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x, y)$, et montrer que $(*)$ est vérifiée.
Montrer pour conclure que ϕ est $\mathcal{C}^2$.

Calcul différentiel - Examen du 2 février 2004
Durée : 3 heures

Questions de cours.

(1 pt) **1.** – Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, Ω un ouvert non vide de E, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to F$ une application.

Relier deux à deux les trois propositions suivantes par les symboles $\Longrightarrow$ et $\not\Longrightarrow$ (l'écriture $A \not\Longrightarrow B$ signifie "des contre-exemples montrent que A n'implique pas B") :

A : L'application f est différentiable en a.

B : L'application f est admet des dérivées directionnelles en a suivant toutes les directions.

C : L'application f est continue en a.

(1 pt) **2.** – Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés complets, Ω un ouvert non vide de E, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to F$ une application $\mathcal{C}^1$.

Relier deux à deux les quatre propositions suivantes par les symboles $\Longrightarrow$ et $\not\Longrightarrow$ (l'écriture $A \not\Longrightarrow B$ signifie "des contre-exemples montrent que A n'implique pas B") :

A : L'application $Df_{(a)} : E \to F$ est bijective et continue, ainsi que son inverse $(Df_{(a)})^{-1} : F \to E$.

B : L'application f est un difféomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$.

C : Il existe $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de a dans E, $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de $f(a)$ dans F, tels que l'application $f_{|\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ soit un difféomorphisme.

D : f est injective sur Ω et pour tout $x \in \Omega$, $Df_{(x)} : E \to F$ est bijective et continue, ainsi que $(Df_{(x)})^{-1} : F \to E$.

Exercice I . — Soient E un espace vectoriel normé dont la norme $\| \ \|$ provient d'un produit scalaire $(\ | \ )$ (ie qu'il existe sur E un produit scalaire $(\ | \ )$ et que pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$). Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f et g deux applications définies sur I et à valeurs dans E. On suppose que f et g sont deux fois dérivables sur I. On pose :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & I & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & (f(t)|g(t)) \end{array}$$

(1 pt) **I-1.** — Montrer que ϕ est deux fois dérivable.

(1 pt) **I-2.** — Calculer $\phi'(t)$, pour $t \in I$ et en déduire $\phi''(t)$.

Exercice II . — Soient E l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}([0,1];\mathbb{R})$ des fonctions bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit E de la norme $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Soient $\phi : E \to \mathbb{R}$ et $\psi : E \to \mathbb{R}$ les applications définies par $\phi(f) = \sin(f(0))$ et $\psi(f) = \cos(f(0))$.

(1 pt) **II-1.** — Montrer que ϕ et ψ sont $\mathcal{C}^\infty$.

(1 pt) **II-2.** — Calculer $D\phi_{(f)}(h)$, pour $f, h \in E$.

(1 pt) **II-3.** — On rappelle que si $f, h, k \in E$:

$$D[g \mapsto D\phi_{(g)}(h)]_{(f)}(k) = D^2\phi_{(f)}(h,k) \qquad (*)$$

En déduire $D^2\phi_{(f)}(h,k)$.

Exercice III . — Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy \neq p\,!, \forall p \in \mathbb{N}\}$ et soit pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, définie par $f_n(x,y) = \dfrac{x^n}{n! - xy}$.

(1 pt) **III-1.** — Montrer que $\mathcal{F} = \{p\,!, p \in \mathbb{N}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. En déduire que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et représenter Ω.

(1 pt) **III-2.** — Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.

(2 pts) **III-3.** — B une partie bornée de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $(x, y) \in B$, on ait : $n! - |xy| \geq n!/2$.
Soit $A \in \mathbb{R}_+$, et p un entier tel que $p \geq A$. Montrer que pour tout réel x tel que $|x| \leq A$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p + 2$, on a : $\dfrac{|x|^n}{n!} \leq \dfrac{A^{p+1}}{n(n-1)}$.

(2 pts) **III-4.** — Grâce aux deux majorations de la question précédente, montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ définit une application différentiable f sur Ω dont on donnera la différentielle $Df_{(a)}(h, k)$, pour $a \in \Omega$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice IV . — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $f(x, y, z) = x^2 - z^2(y^2 - z)$ et soit $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0\}$.

(1 pt) **IV-1.** — Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Étudier la fonction $f_{y_0} :] - \infty, y_0^2] \to \mathbb{R}$ définie par $f_{y_0}(z) = z\sqrt{y_0^2 - z}$ et représenter son graphe.

(1 pt) **IV-2.** — Représenter $\mathcal{H} \cap \Pi_{y_0}$ et $\mathcal{H} \cap \Pi_{xy}$, où Π_{y_0} est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $y = y_0$ et Π_{yz} celui d'équation $x = 0$. En déduire l'allure de $\mathcal{H}$.

(1 pt) **IV-3.** — Quels sont les points $P = (a, b, c)$ de $\mathcal{H}$ au voisinage desquels $\mathcal{H}$ est le graphe d'une application $\mathcal{C}^\infty$ $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ étant un voisinage ouvert de (b, c) dans Π_{yz} et $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de a dans Ox ?
Donner en un tel point P l'équation de $\mathrm{T}_P\mathcal{H}$, le plan tangent à $\mathcal{H}$ en P.

Dans la suite Π désigne un des trois plans de coordonnées de $\mathbb{R}^3$ (ie xOy, xOz ou yOz) et D l'axe de coordonées qui lui est orthogonal (ie Oz, Oy, ou Ox respectivement). On note $p_\Pi : \mathbb{R}^3 \to \Pi$ la projection orthogonale sur Π et $p_D : \mathbb{R}^3 \to D$ la projection orthogonale sur D.

(2 pt) **IV-4.** — On dit que la surface $\mathcal{H}$ est **lisse** en P s'il existe un plan de coordonnées Π et une application $\mathcal{C}^\infty$ $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ étant un voisinage ouvert dans Π de $p_\Pi(P)$ et $\mathcal{V}$ étant un voisinage ouvert dans D de $p_D(P)$, telle qu'un voisinage de P dans $\mathcal{H}$ soit le graphe de ϕ (aux points P de la question précédente $\mathcal{H}$ est donc lisse, pour $\Pi = yOz$).
À l'aide de la version géométrique du théorème de la fonction implicite, montrer que si $P \in \mathcal{H}$ est tel que $\dim(\ker(Df_{(P)})) = 2$, $\mathcal{H}$ est lisse en P.
En déduire les points de $\mathcal{H}$ en lesquels $\mathcal{H}$ n'est pas lisse.

On note $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } f(x, y, z) = 0\}$

(1 pt) **IV-5.** — À l'aide de la représentation de $\mathcal{H}$, représenter Γ.

(1 pt) **IV-6.** — Quels sont les points $P = (a, b, c)$ de Γ au voisinage desquels Γ est le graphe d'une application $\mathcal{C}^\infty$ $\psi : \mathcal{I} \to \mathcal{O}$, $\mathcal{I}$ étant un voisinage ouvert de c dans Oz et $\mathcal{O}$ un voisinage ouvert de (a, b) dans Π_{xy} ?
Donner en un tel point P l'équation de $\mathrm{T}_P\Gamma$, la droite tangenteà Γ en P.

La question suivante est hors barème.

(2 pts) **IV-7.** — On dit que la courbe Γ est **lisse** en P s'il existe un axe de coordonnées D et une application $\mathcal{C}^\infty$ $\psi : \mathcal{I} \to \mathcal{O}$, $\mathcal{I}$ étant un voisinage ouvert dans D de $p_D(P)$ et $\mathcal{O}$ étant un voisinage ouvert dans Π de $p_\Pi(P)$, telle qu'un voisinage de P dans Γ soit le graphe de ψ (aux points P de la question précédente Γ est donc lisse, pour $D = Oz$).
On note $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, f(x, y, z))$.
À l'aide de la version géométrique du théorème de la fonction implicite, montrer que si $P \in \Gamma$ est tel que $\dim(\ker(DF_{(P)})) = 1$, Γ est lisse en P.
En déduire les points de Γ en lesquels Γ n'est pas lisse.

Licence de Mathématiques
Université de Nice-Sophia Antipolis **Année 2003-2004**

Calcul différentiel - Examen du 9 septembre 2004

Durée : 3 heures

Exercice I . — Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, n un entier naturel non nul et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable sur I.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, U un supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^n$ et $\pi_V : \mathbb{R}^n \to V$ la projection sur V parallèlement à U. On note $\bar{\gamma}$ la projection de l'arc γ sur V, ie pour tout $t \in I$, $\bar{\gamma}(t) = \pi_V(\gamma(t))$.

(1 pt) **I-1.** — Montrer que $\bar{\gamma} : I \to V$ est un arc dérivable sur I et calculer sa vitesse $\bar{\gamma}'(t)$ à l'instant t.

On suppose maintenant que $0_{\mathbb{R}^n} \notin \gamma(I)$. On note $\| \ \|$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$ et $\widetilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par : pour $t \in I$, $\widetilde{\gamma}(t) = \dfrac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$. On dira que $\widetilde{\gamma}$ est la **projection sphérique** de γ.

(1 pt) **I-2.** — On note S^{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, ie $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| = 1\}$.
Montrer que quel que soit $t \in I$, $\widetilde{\gamma}(t) \in S^{n-1}$.

(2 pts) **I-3.** — Montrer que $\widetilde{\gamma}$ est dérivable sur I et calculer sa vitesse $\widetilde{\gamma}'(t)$, pour $t \in I$.

Soit $t \in I$. On note $\gamma(t)^\perp$ l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ constitué des vecteurs orthogonaux à $\gamma(t)$ (ou à $\widetilde{\gamma}(t)$). Puisque $\gamma(t)^\perp$ et la droite vectorielle engendrée par $\widetilde{\gamma}(t)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(r(t), s(t)) \in \mathbb{R} \times \gamma(t)^\perp$ tel que :

$$\gamma'(t) = r(t) \cdot \widetilde{\gamma}(t) + s(t),$$

On dira que $r(t) \cdot \widetilde{\gamma}(t)$ est la composante radiale de la vitesse $\gamma'(t)$ et $s(t)$ sa **composante sphérique**.

(1 pt) **I-4.** — À l'aide de la question précédente, montrer que $\widetilde{\gamma}'(t)$, la vitesse à l'instant t de la projection sphérique de γ est la composante sphérique de $\gamma'(t)$, divisée par $\gamma(t)$.

Exercice II . — Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x\cos(y) \neq p^2, \forall p \in \mathbb{N}\}$ et soit pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, définie par $f_n(x, y) = \dfrac{y\sin(x)}{n^2 - x\cos(y)}$.

(1 pt) **II-1.** — Montrer que $\mathcal{F} = \{p^2, p \in \mathbb{N}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. En déduire que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(1 pt) **II-2.** — Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.

(2 pts) **II-3.** — Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ définit une application $\mathcal{C}^1$ f sur Ω dont on donnera la différentielle $Df_{(a)}(h, k)$, pour $a \in \Omega$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice III . — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x,y,z) = x^2 + z^2 + y^4 - y^2$ et soit $\mathcal{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; f(x,y,z) = 0\}$. Dans la suite $\Pi_{xy}, \Pi_{xz}, \Pi_{yz}$ désignent respectivement les trois plans d'équation $z = 0, y = 0, x = 0$ et Ox, Oy, Oz les droites $\Pi_{xy} \cap \Pi_{xz}, \Pi_{xy} \cap \Pi_{yz}, \Pi_{xz} \cap \Pi_{yz}$.

(1 pt) **III-1.** — Montrer que $(x,y,z) \in \mathcal{H}$ implique $y \in [-1,1]$, et que $(x,y,z) \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow (x,-y,z) \in \mathcal{H}$.

(1 pt) **III-2.** — Soit $y_0 \in [0,1]$. Quel est l'ensemble $\mathcal{H} \cap \Pi_{y_0}$, où Π_{y_0} désigne le plan affine de $\mathbb{R}^3$ d'équation $y = y_0$?

(2 pts) **III-3.** — Étudier la fonction $r : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $r(y) = \sqrt{y^2 - y^4}$ et représenter son graphe. En déduire l'allure de $\mathcal{H}$.

(1 pt) **IV-4.** — Quels sont les points $P = (a,b,c)$ de $\mathcal{H}$ au voisinage desquels $\mathcal{H}$ est le graphe d'une application $\mathcal{C}^\infty$ $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ étant un voisinage ouvert de (b,c) dans Π_{yz} et $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de a dans Ox ?
Donner en un tel point P l'équation de $\mathrm{T}_P\mathcal{H}$, le plan tangent à $\mathcal{H}$ en P.

(2 pts) **IV-5.** — À l'aide de la version géométrique du théorème de la fonction implicite, montrer que si $P \in \mathcal{H}$ est tel que $\dim(\ker(Df_{(P)})) = 2$, dans un voisinage de P, $\mathcal{H}$ est le graphe d'une application $\mathcal{C}^\infty$ $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, avec $\mathcal{U}$ un ouvert d'un des trois plans $\Pi_{xy}, \Pi_{xz}, \Pi_{yz}$ et $\mathcal{V}$ un intervalle ouvert de la droite orthogonale au plan en question.

On dira dans ce cas que $\mathcal{H}$ **est lisse en** P.

(1 pt) **IV-6.** — Déduire de la question précédente les points de $\mathcal{H}$ en lesquels $\mathcal{H}$ n'est pas lisse.

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ et soit $\mathcal{K} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; g(x,y,z) = 0\}$.

(1 pt) **IV-7.** — Pour $z_0 \in \mathbb{R}$, quel est l'ensemble $\mathcal{K} \cap \Pi_{z_0}$, où Π_{z_0} désigne le plan affine de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = z_0$? En déduire la représentation de $\mathcal{K}$.

On note $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; f(x,y,z) = 0 \text{ et } g(x,y,z) = 0\} = \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$.

(2 pts) **IV-8.** — Montrer que $(x,y) \in \Pi_{xy}$ est dans le projeté de Γ sur Π_{xy} parallèlement à Oz si et seulement si $x^2 = \sqrt{\frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3}y^3}$. En déduire l'allure de ce projeté, puis l'allure de Γ.

(2 pts) **IV-9.** — On note $F = (f,g) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. À l'aide de la version géométrique du théorème de la fonction implicite, montrer que si $P \in \Gamma$ est tel que $\dim(\ker(DF_{(P)})) = 1$, dans un voisinage de P, Γ est le graphe d'une application $\mathcal{C}^\infty$ $\Phi : \mathcal{I} \to \mathcal{W}$, avec $\mathcal{I}$ un intervalle ouvert d'un des trois axes O_x, O_y, O_z et $\mathcal{W}$ un ouvert du plan orthogonal à la droite en question.

On dira dans ce cas que Γ **est lisse en** P.

(2 pts) **IV-10.** — Déduire de la question précédente les points de $\mathcal{H}$ en lesquels Γ n'est pas lisse et donner l'équation de la droite tangente à Γ aux points P en lesquels Γ est lisse.

Corrigés des exercices et des problèmes - Année 2000-2001

Corrigé de l'examen du 29 novembre 2000

Problème I. — On calcule explicitement la différentielle seconde du produit bilinéaire de deux fonctions $\mathcal{C}^2$.

1 . – L'application B étant par hypothèse bilinéaire continue, B est $\mathcal{C}^\infty$. L'application $(f,g) : \Omega \to F \times F$ est d'autre part $\mathcal{C}^p$, puisque ses deux composantes, f et g, sont par hypothèse $\mathcal{C}^p$; on en conclut par le théorème des fonctions composées que $\Pi = B \circ (f,g)$ est $\mathcal{C}^p$.

2 . – Soit $x \in \Omega$. On a, par le théorème des fonctions composées:

$$D\Pi_{(x)} = DB_{(f(x),g(x))} \circ D(f,g)_{(x)} = DB_{(f(x),g(x))} \circ (Df_{(x)}, Dg_{(x)}),$$

de sorte que pour tout $\vec{h} \in E$, $D\Pi_{(x)}(\vec{h}) = B(f(x), Dg_{(x)}(\vec{h})) + B(Df_{(x)}(\vec{h}), g(x))$.

3 . – Soient:

$$\begin{array}{llll} B_1: & F \times \mathcal{L}(E;F) & \to & \mathcal{L}(E;G) \\ & (y,L) & \to & B_1(y,L): \begin{array}{lll} E & \to & G \\ \vec{h} & \to & B(y,L(\vec{h})) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} B_2: & \mathcal{L}(E;F) \times y & \to & \mathcal{L}(E;G) \\ & (L,y) & \to & B_2(L,y): \begin{array}{lll} E & \to & G \\ \vec{h} & \to & B(L(\vec{h}),y) \end{array} \end{array}.$$

La question précédente montre que: $D\Pi = B_1 \circ (f, Dg) + B_2 \circ (Df, g)$.

4 . – L'application B_1 est trivialement bilinéaire. Soient $(y,L) \in F \times \mathcal{L}(E;F)$. On a alors $\|B_1(y,L)\|_{\mathcal{L}(E;G)} = \sup_{\vec{h}\in E\setminus\{0_E\}} \dfrac{\|B(y,L(\vec{h}))\|}{\|\vec{h}\|} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(F,F;G)}.\|y\| \sup_{\vec{h}\in E\setminus\{0_E\}} \dfrac{\|L(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|}$, puisque B est bilinéaire continue. On en conclut que: $\|B_1(y,L)\|_{\mathcal{L}(E;G)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(F,F;G)}.\|y\|.\|L\|_{\mathcal{L}(E;F)}$, puisque L est léaire continue, et donc finalement que: $\|B_1(y,L)\|_{\mathcal{L}(E;G)} \leq \Lambda.\|y\|.\|L\|_{\mathcal{L}(E;F)}$, avec $\Lambda = \|B\|_{\mathcal{L}(F,F;G)}$; c'est-à-dire que B_1 est bilinéaire continue. On montre bien sûr, de la même façon que B_2 est bilinéaire continue.

5 . – D'après la question 3, $D\Pi = B_1 \circ (f, Dg) + B_2 \circ (Df, g)$, et d'après la question précédente, B_1 et B_2 sont $\mathcal{C}^\infty$, on peut donc, pour calculer la différentielle seconde de Π, utiliser le théorème des fonctions composées:

$$D^2\Pi_{(x)} = DB_{1(f(x),Dg_{(x)})} \circ (Df_{(x)}, D^2g_{(x)}) + DB_{2(Df(x),g(x))} \circ (D^2f_{(x)}, Dg_{(x)}).$$

Et donc, quel que soit $\vec{h} \in E$:

$$D^2\Pi_{(x)}(\vec{h}) = DB_{1(f(x),Dg_{(x)})}(Df_{(x)}(\vec{h}), D^2g_{(x)}(\vec{h})) + DB_{2(Df(x),g(x))}(D^2f_{(x)}(\vec{h}), Dg_{(x)}(\vec{h})),$$

$$D^2\Pi_{(x)}(\vec{h}) = B_1(f(x), D^2g_{(x)}(\vec{h})) + B_1(Df_{(x)}(\vec{h}), Dg_{(x)}) + B_2(Df(x), Dg_{(x)}(\vec{h})) + B_2(D^2f_{(x)}(\vec{h}), g(x)).$$

En conclusion, quel que soit $\vec{k} \in E$:

$$D^2\Pi_{(x)}(\vec{h})(\vec{k}) = B(f(x), D^2g_{(x)}(\vec{h})(\vec{k})) + B(Df_{(x)}(\vec{h}), Dg_{(x)}(\vec{k}))$$

$$+B(Df_{(x)}(\vec{k}), Dg_{(x)}(\vec{h})) + B(D^2f_{(x)}(\vec{h})(\vec{k}), g(x)).$$

6 . – Lorsque $E = F = G = \mathbb{R}$, on applique la formule ci-dessus, avec B le produit usuel de $\mathbb{R}$, qui est bien bilinéaire continue. Dans ce cas, $Df_{(x)}(\vec{h}) = f'(x).h$ et $D^2f_{(x)}(\vec{h})(\vec{k}) = f''(x).h.k$. On obtient donc:

$$(f.g)''(x).h.k = g''(x).h.k.f(x) + f'(x).h.g'(x).k + g'(x).h.f'(x).k + f''(x).h.k.g(x).$$

Problème II. — Le but du problème est de comprendre le comportement des racines des polynôme unitaires de degré trois en fonction de leurs coefficients. Bien sûr étudier les racines d'un polynôme général de degré trois du type $\gamma x^3 + \beta x^2 + \alpha x + \delta$ revient à étudier les racines du polynôme unitaire $x^3 + \frac{\beta}{\gamma}x^2 + \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\delta}{\gamma}$. Ce qui suit montre en outre que l'étude du polynôme général unitaire $x^3 + \beta x^2 + \alpha x + \delta$ se dd́uit aisément de celle de $x^3 + \beta x^2 + \alpha x + 1$.

1 . – On peut résoudre cette question sans préciser la norme considérée sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^3$, puisque la notion de différentiabilité ne dépend pas des normes en dimension finie.

Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \ni ((\alpha, \beta), x) \to (\alpha, \beta, x) \in \mathbb{R}^3$. Cette application est un isomorphisme linéaire, donc est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. De plus $P \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^3 \ni (\alpha, \beta, x) \to x^3 + \beta x^2 + \alpha x + 1 \in \mathbb{R}$ est un polynôme, donc est $\mathcal{C}^\infty$. On en conclut que: $P = P \circ \Phi^{-1} \circ \Phi$ est $\mathcal{C}^\infty$.

2 . – Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ sont de degré deux. Un polynôme p de degré trois est donc: - soit produit d'un tel polynôme et d'un polynôme de degré 1, et dans ce cas p admet une unique racine - soit produit de trois polynômes de degré 1, et dans ce cas p admet trois racines, non nécesairement disctinctes.

3 . – Comme P est $\mathcal{C}^\infty$, P admet toutes ses différentielles partielles à tous les ordres, et on a classiquement: $D_2P_{(a,x)} : \mathbb{R} \ni h \to p_a'(x).h \in \mathbb{R}$. Ainsi $D_2P_{(a,x)}$ n'est pas inversible dès que $p_a'(x) = 0$, c'est-à-dire que le discriminant de p_a' est positif, ce qui se traduit par $\beta^2 - 3\alpha \geq 0$, et que $x = \dfrac{1}{3}(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 3\alpha})$. Enfin $\Delta \cap P^{-1}(\{0\})$ est le lieu des points (a, x) tels que x est à la fois racine de p_a et de p_a', donc d'après $\mathcal{R}$, $(a, x) \in \Delta \cap P^{-1}(\{0\})$ si et seulement si x est racine multiple de p_a.

4 . – Ω est l'image réciproque par la fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \ni (\alpha, \beta) \to \beta^2 - 3\alpha \in \mathbb{R}$ de l'ouvert $]-\infty; 0[$, donc est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in \Omega$. p_a a au moins une racine x. Comme $P(a, x) = 0$ et $D_2P_{(a,x)} \in \mathcal{I}som(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ (puisque $(a, x) \notin \Delta$), le théorème de la fonction implicite assure qu'existe Ω_a un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^2$, Ω_x un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}$ et une application $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi : \Omega_a \to \Omega_x$, tels que: $P^{-1}(\{0\}) \cap (\Omega_a \times \Omega_x)$ soit le graphe de φ (au-dessus de Ω_a).

5 . – Soit toujours $a \in \Omega$. Si p_a ne possède pas une racine unique, p_a en possède trois (question 2). Mais par la question 3, une racine x de p_a est multiple si et seulement si $(a, x) \in \Delta \cap P^{-1}(\{0\})$. Or si $a \in \Omega$, $\beta^2 - 3\alpha < 0$, et donc certainement $(a, x) \notin \Delta$, ce qui assure bien que les trois racines de p_a sont distinctes. Notons-les x_1, x_2 et x_3. Pour chacune d'elles on peut appliquer le résultat de la question précédente: il existe trois applications $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi_1 : \Omega_a^1 \to \Omega_{x_1}$, $\varphi_2 : \Omega_a^2 \to \Omega_{x_2}$, $\varphi_3 : \Omega_a^3 \to \Omega_{x_3}$, où Ω_a^j, $j = 1, 2, 3$ est un voisinage ouvert de a dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, et Ω_{x_j} est un voisinage ouvert de x_j, dans $\mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, tels que $P^{-1}(\{0\}) \cap (\Omega_a^j \times \Omega_{x_j})$ soit le graphe de φ_j, $j = 1, 2, 3$. Comme x_1, x_2, x_3 sonts deux à deux distincts, on peut considérer que $\Omega_{x_1}, \Omega_{x_2}, \Omega_{x_3}$ sont disjoints (quitte à restreindre chacun de ses voisinages afin qu'ils soient deux à deux disjoints et à poser $\Omega'^j_a = \Omega_a^j \cap \varphi_j^{-1}(\Omega_{x_j})$, $j = 1, 2, 3$). On pose alors $\Omega_a = \Omega_a^1 \cap \Omega_a^2 \cap \Omega_a^3$. Ω_a est un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^2$ et $(\Omega_a \times \Omega_{x_j}) \cap P^{-1}(\{0\})$ est le graphe de φ_j au-dessus de Ω_a, pour $j = 1, 2, 3$.

6 . – Soit $a \in \Omega$. Si p_a possède trois racines, par la question précédente, dans un voisinage Ω_a de a dans Ω, p_a possède encore trois racines distinctes: $\varphi_j(a')$, $a' \in \Omega_a$, $j = 1, 2, 3$. Supposons maintenant que p_a possède une unique racine x, et montrons que a n'est pas limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle p_{a_n} possède trois racines distinctes x_n, y_n, z_n (ce qui prouvera que $\nu(a)$ est localement constant sur Ω, puisque $\nu(a) = 1$ ou $\nu(a) = 3$). Si une telle suite existait, comme $p_{a_n}(x_n) = x_n^3 + \beta_n x_n^2 + \alpha_n x_n + 1 = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n, \beta_n) = (\alpha, \beta)$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait nécessairement bornée (de même $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quitte à en extraire une sous-suite convergente, on peut donc considérer que (a_n, x_n) converge vers $(a, X) \in \mathbb{R}^3$, et par conservation des égalités par passage à la limte, $p_a(X) = 0$ (de même on obtient des racines Y et Z de p_a, à partir de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Or X, Y et Z ne peuvent tous les trois appartenir à Ω_x, défini par la question 4, sinon dans $\Omega_a \times \Omega_x$, on aurait plus d'une solution à l'équation $p_{a'}(t) = 0$, $a' \in \Omega_a$ (les solutions $x_n \neq y_n \neq z_n$ de $p_{a_n}(t) = 0$, pour n suffisamment grand), ce qui est impossible car ces solutions sont du type $t = \varphi(a')$ dans $\Omega_a \times \Omega_x$. En conclusion, comme par exemple $X \notin \Omega_x$, on aurait $X \neq x$ et $p_a(x) = p_a(X) = 0$, ce qui est contraire à notre hypothèse. Finalement $\nu(a)$ est bien localement constant sur Ω, donc différentiable sur Ω, de différentielle nulle. Par le théorème de la moyenne, comme Ω est convexe, quels que soient a et a' dans Ω, $\|\nu(a) - \nu(a')\| \leq \sup\limits_{\xi\in[a,a']} \|D\nu_{(\xi)}\|.\|a - a'\| = 0$, et donc $\nu(a)$, le nombre de racines de p_a est constant sur Ω (on pouvait bien sûr utiliser directement le théorème du cours qui donne la constance d'une application de différentielle nulle sur un connexe ou un convexe).

7 . – Soit $p_a(x) = (x^2 + x + 1)(x + 1) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Le polynôme $(x^2 + x + 1)$ est irréductible, donc p_a admet une unique racine. Comme $a = (2, 2)$, $a \in \Omega$, et donc par la question précédente le nombre de racines de p_b, pour $b \in \Omega$, est toujours 1.

Question subsidiaire . – On a en réalité déja montré que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_3$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$, à la question 6. En effet, si $a \in \mathcal{O}_1$ ou $a \in \mathcal{O}_3$, en notant, x_0 l'unique racine de p_a (si $a \in \mathcal{O}_1$), x_1, x_2 et x_3 les trois racines distinctes de p_a (si $a \in \mathcal{O}_3$), par la question 3, $D_2P_{(a,x_j)} \in \mathcal{I}som(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $j = 0, 1, 2, 3$, et en reprenant les arguments de la question 6 (essentiellement le théorème de la fonction implicite), on montre que pour a' voisin de a dans $\mathbb{R}^2$, $p_{a'}$ possède encore respectivement une ou trois racines distinctes (l'ensemble Ω ne servant à la question 6 qu'à assurer que $D_2P_{(a,x_j)} \in \mathcal{I}som(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et ne jouant pas de rôle supplémentaire dans la preuve de la constance locale de $\nu(a)$!).

Montrons pour finir que $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_3$ est dense dans $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire que l'on aura prouvé que le lieu des paramètres $a \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels p_a possède (au moins) une racine multiple est un fermé d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^2$ (c'est un ensemble "maigre" de $\mathbb{R}^2$, ou encore la propriété: "ne pas avoir de racine multiple" est une propriété générique).

Supposons qu'existe un ouvert $\mathcal{O}_\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $a \in \mathcal{O}_\mathcal{M} \implies p_a$ admet une racine multiple x_a. Alors $(a, x_a) \in \Delta \cap P^{-1}(\{0\})$. Mais Δ est une surface de $\mathbb{R}^3$, donnée par deux graphes Δ_1 et Δ_2 (question 3). $\Delta_1 \cap P^{-1}(\{0\})$ ou $\Delta_2 \cap P^{-1}(\{0\})$ contient un ouvert de Δ, car si ces deux fermés de Δ étaient d'intérieur vide, leur image par π_1

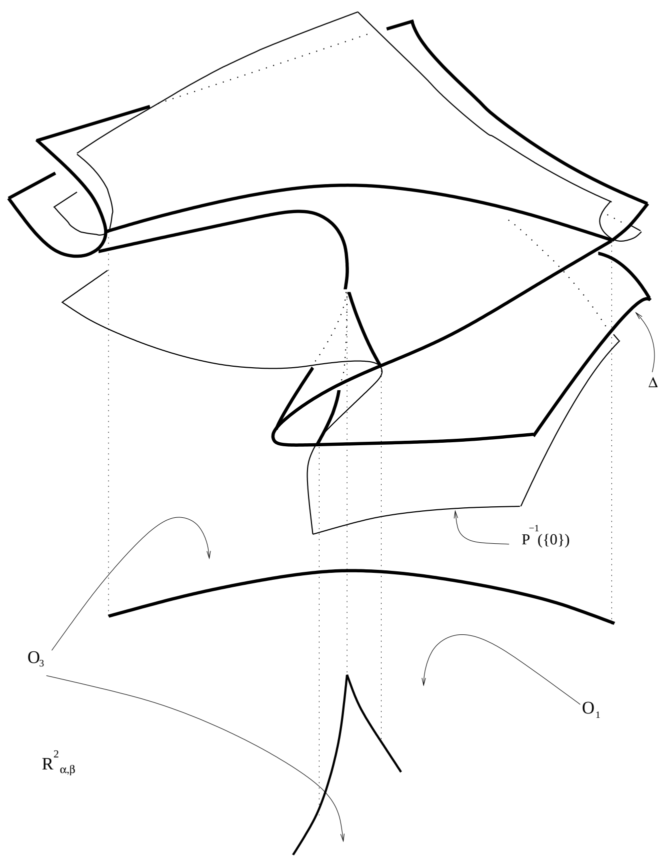
et π_2, les projections de Δ_1 et Δ_2 dans $\mathbb{R}^2$, seraient encore deux fermés d'intérieur vides (π_1 et π_2 réalisant des homéomorphismes de Δ_1 et Δ_2 sur $\mathbb{R}^2$). Or l'union de ces deux projections est $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et on peut montrer que l'union de deux fermés d'intérieur vide est encore un fermé d'intérieur vide, ce qui donnerait une contradiction.

Autrement dit, en tout point (a, x_a) de Δ (qui est donnée par $p'_a(x_a) = 0$), le tangent à Δ est celui de la surface $P^{-1}(\{0\})$ (qui est donnée par $P_{(a,x_a)} = 0$) en (a, x_a). On en conclut que $\overrightarrow{grad}p'_a(x_a)$ et $\overrightarrow{grad}P(a, x_a)$ sont colinéaires, c'est-à-dire que les vecteurs: $\overrightarrow{grad}P_{(a,x_a)} = (x_a, x_a^2, p'_a(x_a) = 0)$ et $\overrightarrow{grad}p'_a(x_a) = (1, 2x_a, 6x_a + 2\beta)$ sont colinéaires, pour (α, β) dans l'ouvert $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ de $\mathbb{R}^2$. On obtient le système:

$$\begin{pmatrix} x_a \\ x_a^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_a \\ 6x_a + 2\beta \end{pmatrix},$$

qui donne: $x = 0$ (mais dans ce cas x_a n'est pas solution de p_a, quel que soit $a \in \mathbb{R}^2$), et $x_a^2 = 2x_a^2,\ \beta = -3x_a$, qui n'admet pas de solution. Notre hypothèse était donc absurde.

Nous donnons ci-dessous une représentation dans $\mathbb{R}^3$ de Δ et $P^{-1}(\{0\})$; leurs points communs sont les points (a, x) en lesquels p_a admet une racine multiple, et $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_3$ est le complémentaire dans $\mathbb{R}^2_{\alpha,\beta}$ de la projection sur $\mathbb{R}^2_{\alpha,\beta}$ de ces points.



Calcul différentiel - Un corrigé de l'examen du 25 février 2001

1 . — L'application F est $\mathcal{C}^1$, puisque ses deux composantes f et g le sont. Notons

$$\begin{array}{llll}\Phi: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3\\ & (x,(y,z)) & \to & \Phi(x,(y,z))=(x,y,z).\end{array}$$

Cette application est linéaire et continue, puisque sa source est un espace vectoriel de dimension finie, donc Φ est une application $\mathcal{C}^\infty$. Comme $\widetilde{F}=F\circ\Phi$ et que F est $\mathcal{C}^1$, on en conclut que $\widetilde{F}$ est $\mathcal{C}^1$.

2 . — La matrice associée à $DF_{(a,b,c)}$ est:

$$JacF_{(a,b,c)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}\end{pmatrix}(a,b,c)$$

La matrice associée à $D\widetilde{F}_{(a,(b,c))}$ est la matrice jacobienne en (b,c) de l'application $(y,z)\ni\mathbb{R}^2\to F(a,y,z)\in\mathbb{R}^2$, il s'agit par conséquent de:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}\end{pmatrix}(a,b,c)$$

3 . — L'application $\widetilde{F}$ étant de classe 1, et
$D_2\widetilde{F}_{(a,(b,c))}$ étant continue (sa source est $\mathbb{R}^2$), le théorème de la fonction implicite pour $\widetilde{F}$ en $(a,(b,c))$ s'énonce ainsi: si l'application linéaire $D_2\widetilde{F}_{(a,(b,c))}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est inversible, il existe un voisinage ouvert Ω de a dans $\mathbb{R}$, un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de (b,c) dans $\mathbb{R}^2$ et une application $\mathcal{C}^1$, $\varphi:\Omega\to\mathcal{U}$, tels que $C\cap(\Omega\times\mathcal{U})=\{(x,\varphi(x));x\in\Omega\}=Graphe(\varphi)$.

4 . — L'application linéaire $D_2\widetilde{F}_{(a,(b,c))}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, et celui-ci est $(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y})(M)$. Géométriquement cette condition signifie que les vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $(\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})(M)$ et $(\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z})(M)$ ne sont pas colinéaires. Or ces vecteurs sont respectivement les projections sur $\mathbb{R}^2_{y,z}$ de $\overrightarrow{grad}f_{(M)}$ et de $\overrightarrow{grad}g_{(M)}$.

5.a . — Soit Δ une droite de T_MC. Celle-ci est par définition limite d'une suite de droites $(\Delta_p)_{p\in\mathbb{N}}$, telle que Δ_p passe par M et M_p, avec M_p un point de C distinct de M et tendant vers M. Remarquons que de telles suites existent: puisque C est localement au voisinage de M le graphe de φ, on peut poser $M_p=(m_p,\varphi(m_p))$, avec m_p une suite de points de Ω distincts de a et tendant vers a. Il est alors clair que M_p est une suite de points distincts de M (la première coordonnée m_p de M_p étant distincte de a) qui tend vers M (par continuité de φ).

La suite M_p est une suite de C, donc à la fois de $f^{-1}(\{0\})$ et de $g^{-1}(\{0\})$. Par conséquent la droite Δ est à la fois dans $\mathrm{T}_Mf^{-1}(\{0\})$ et $\mathrm{T}_Mg^{-1}(\{0\})$. On a ainsi prouvé que $\mathrm{T}_MC\subset\mathrm{T}_Mf^{-1}(\{0\})\cap\mathrm{T}_Mg^{-1}(\{0\})$.

5.b . — On a: $\mathrm{T}_Mf^{-1}(\{0\})=M+\overrightarrow{grad}f^\perp_{(M)}$ et $\mathrm{T}_Mg^{-1}(\{0\})=M+\overrightarrow{grad}g^\perp_{(M)}$ (cf le dernier exercice de la planche 3, où le tangent est défini non pas avec des suites de points, mais avec des arcs dérivables tracés sur l'ensemble en question - les deux définitions sont non trivialement équivalentes). Comme par la question **4**, $\overrightarrow{grad}f_{(M)}$ et $\overrightarrow{grad}g_{(M)}$ ne sont pas colinéaires (leurs projections sur $\mathbb{R}^2_{y,z}$ ne le sont pas !), leurs plans orthogonaux respectifs ne sont pas parallèles; ils se coupent donc suivant une droite. $\mathrm{T}_Mf^{-1}(\{0\})\cap\mathrm{T}_Mg^{-1}(\{0\})$ est donc une droite affine de $\mathbb{R}^3$ passant par M. D'autre part, on a vu à la question **5.a.** que M n'est pas un point isolé de C: par la remarque, T_MC contient au moins une droite, et par **5.a.** est contenu dans la droite $\mathrm{T}_Mf^{-1}(\{0\})\cap\mathrm{T}_Mg^{-1}(\{0\})$. L'égalité a donc lieu.

Question subsidiaire . — Par la question **4**, la condition $(\mathcal{S})$ signifie que les projections sur $\mathbb{R}^2_{y,z}$ de $\overrightarrow{grad}f_{(M)}$ et de $\overrightarrow{grad}g_{(M)}$ sont non colinéaires. Les vecteurs $\overrightarrow{grad}f_{(M)}$ et $\overrightarrow{grad}g_{(M)}$ ne sont donc pas dans un même plan de $\mathbb{R}^3$ contenant l'axe des x. Leurs orthogonaux ne se coupent donc pas suivant une droite contenue dans le plan $\mathbb{R}^2_{y,z}$, ou encore $\mathrm{T}_MC=(M+\overrightarrow{grad}f^\perp_{(M)})\cap(M+\overrightarrow{grad}g^\perp_{(M)})$ n'est pas une droite contenue dans l'orthogonal de l'axe des x passant par a. La courbe C vient se "coller" en M à la droite T_MC, qui est en regard de l'axe des x. Localement en M, la courbe C se projette donc sur tout un voisinage de a dans l'axe des x; elle est localement en M étalée au-dessus de $\mathbb{R}_x$. D'où la possibilité d'écrire C comme un graphe local en a au-dessus de $\mathbb{R}_x$.

Corrigé de l'examen du 10 septembre 2001

Exercice I. 1 . – Il s'agit d'une question de cours. Soit $A = (x, y) \in E \times E$ et $\vec{H} = (h, k) \in E \times E$. On a $B(A + \vec{H}) - B(A) = B(x + h, y + k) - B(x, y) = B(h, y) + B(x, k) + B(h, k)$ par bilinéarité et $E \times E \ni (h, k) \to B(h, y) + B(x, k) \in \mathbb{R}$ est linéaire. De plus par hypothèse B est continue, c'est-à-dire qu'il existe $\beta > 0$ tel que quel que soit $(h, k) \in E \times E$, $\|B(h, k)\| \leq \beta.\|h\|.\|k\| \leq \beta.\max(\|h\|, \|k\|).\max(\|h\|\|k\|) = \|\vec{H}\|.\epsilon(\vec{H})$, avec $\epsilon(\vec{H}) \to 0$ quand $\|\vec{H}\| \to 0$. On en conclut que B est différentiable en A et que $DB_{(A)}(\vec{H}) = B(x, k) + B(h, y)$.

Remarque. La question de la continuité de B ne se pose évidemment pas si $\dim(E) < \infty$.

2. – Il s'agit encore d'une question de cours, pour laquelle on ne demandait pas les justifications qui suivent. la fonction f est différentiable en x si et seulement si existent une application linéaire notée $Df_{(x)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une fonction $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 avec sa variable telles que pour tout $h \in \mathbb{R}$: $f(x+h) - f(x) = Df_{(x)}(h) + |h|.\epsilon(h)$. Or une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est nécessairement de la forme $Df_{(x)}(h) = a.h$, pour un certain réel $a (= Df_{(x)}(1))$. On en déduit que f est différentiable en x si et seulement si quel que soit $h \neq 0$, $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = a + \dfrac{|h|}{h}.\epsilon(h)$, si et seulement si la limite du rapport $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ existe, c'est-à-dire si et seulement si f est dérivable en x. On obtient de plus que $f'(x) = a = Df_{(x)}(1)$, ou encore $Df_{(x)}(h) = f'(x).h$.

3 . – Notons $\delta : E \ni x \to (x, x) \in E \times E$, $B : E \times E \ni (x, y) \to B(x, y) = (x|y) \in \mathbb{R}$, et $r : \mathbb{R} \ni s \to r(s) = \sqrt{s} \in \mathbb{R}$. f est par hypothèse dérivable, donc différentiable par la question précédente, de même r est différentiable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Par la première question B est différentiable, car B est bilinéaire et $B(x, y) \leq \|x\|.\|y\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz) et donc B est continue. Enfin δ est différentiable, car $\delta = (Id_E, Id_E)$ et donc $D\delta_{(x)} = (Id_E, Id_E)$ quel que soit x dans E (δ est une application à valeurs dans un produit, dont les composantes sont linéaires). Comme f ne s'annule pas par hypothèse, $B \circ \delta \circ f$ non plus, et ainsi par le théorème des fonctions composées $F = r \circ B \circ \delta \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a:

$$F'(t) = DF_{(t)}(1) = [Dr_{(f(t)|f(t))} \circ DB_{(f(t),f(t))} \circ D\delta_{(f(t))} \circ Df_{(t)}](1)$$

$$= [Dr_{(f(t)|f(t))} \circ DB_{(f(t),f(t))} \circ D\delta_{(f(t))}](f'(t)) = [Dr_{(f(t)|f(t))} \circ DB_{(f(t),f(t))}](f'(t), f'(t))$$

$$= [Dr_{(f(t)|f(t))}]((f(t)|f'(t)) + (f'(t)|f(t))) = [Dr_{(f(t)|f(t))}](2(f(t)|f'(t)))$$

$$= r'((f(t)|f(t))).2.(f(t)|f'(t)) = \frac{(f(t)|f'(t))}{\sqrt{(f(t)|f(t))}} = \frac{(f(t)|f'(t))}{\|f(t)\|}.$$

Exercice II. **1 .** – La trace de Σ dans le plan $y = 0$ est l'ensemble des points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $y = 0$ et $y^2 = 4x^2(z - x^2)$, donc $y = 0$ et $x = 0$ ou $z = x^2$. Il s'agit de la réunion de l'axe des $z \geq 0$ et de la parabole $z = x^2$ du plan $y = 0$. La courbe de niveau $\Sigma \cap \Pi_{z_0}$ est l'ensemble des points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $z = z_0$ et $y^2 = 4x^2(z_0 - x^2)$. Cette courbe de niveau est donc la réunion des graphes des fonctions $y = +\ ou - 2x\sqrt{z_0 - x^2}$ dans le plan $z = z_0$. Une étude rapide donne l'allure suivante pour $\Sigma \cap \Pi_{z_0}$, de laquelle on déduit celle de Σ:

2 . – Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to ((y, z), x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Φ est un isomorphisme linéaire. Notons $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \ni ((y, z), x) \to F((y, z), x) = [f \circ \Phi^{-1}]((y, z), x) = f(x, y, z)$. Soit alors $(x_0, y_0, z_0) \notin P_x$, c'est-à-dire $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Montrons qu'au voisinage de (x_0, y_0, z_0), Σ est un graphe au-dessus du plan yOz. F est $\mathcal{C}^\infty$ comme f, $F((y_0, z_0), x_0) = 0$, $D_2F_{((y_0,z_0)x_0)} : \mathbb{R} \ni h \to D_2F_{((y_0,z_0)x_0)}(h) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0).h \in \mathbb{R}$ est une application linéaire inversible, puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Par le théorème de la fonction implicite, il existe un voisinage ouvert Ω_1 de (y_0, z_0) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage ouvert Ω_2 de x_0 dans $\mathbb{R}$ et une application $\mathcal{C}^\infty$ $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ telle que $(\Omega_1 \times \Omega_2) \cap \{((y, z), x); F((y, z), x) = 0\}$ soit le graphe de φ au-dessus de Ω_1. Autrement dit, puisque $F((y, z), x) = 0$ ssi $f(x, y, z) = 0$, $\Sigma \cap (\Omega_2 \times \Omega_1)$ est le graphe de φ au-dessus de Ω_1.

3 . – Commençons par remarquer que P_x est donné par $\Sigma \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0\}$, c'est-à-dire est la réunion de $x = y = 0, z \geq 0$ (l'axe des $z \geq 0$) et de la courbe de $\mathbb{R}^3$: $z = 2x^2, y = +ou - 2x^2$.

Au voisinage d'un point de P_x, Σ ne peut-être le graphe d'une application $\varphi : \mathbb{R}^2 \ni (y, z) \to x = \varphi(y, z) \in \mathbb{R}$, puisque si $(a, b, c) \in P_x$, si $\mathcal{U}$ est un voisinage ouvert de (a, b, c) dans $\mathbb{R}^3$ suffisamment petit, si (β, γ) est dans $\pi(\mathcal{U} \setminus P_x)$ (π étant la projection orthogonale sur yOz), la droite $\Delta_{(\beta,\gamma)}$ passant par (β, γ) et orthogonale à yOz coupe Σ nécessairement en deux points (contre un seul si Σ était localement en (a, b, c) le graphe d'une application φ !). On conclut des questions 2 et 3 que $\Sigma_x = P_x$.

4 . – L'application F est $\mathcal{C}^\infty$, comme f. De plus $DF_{(x_0,y_0,z_0)}$ est un isomorphisme linéaire, car de matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de (x_0,y_0,z_0) dans $\mathbb{R}^3$ et un voisinage ouvert Ω de $F(x_0,y_0,z_0) = (0,y_0,z_0)$ dans $\mathbb{R}^3$ tels que $F_{|\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \Omega$ soit un difféomorphisme de $\mathcal{O}$ sur Ω. Si $(x,y,z) \in \Sigma \cap \mathcal{O}$, $F(x,y,z) = (f(x,y,z) = 0, y, z) \in \Omega \cap \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3; X = 0\}$. Réciproquement, si $(0,Y,Z) \in \Omega$, $(0,Y,Z) = F(x,y,z) = (f(x,y,z),y,z)$, pour un certain$(x,y,z) \in \mathcal{O}$. On en déduit que $f(x,y,z) = 0$, c'est-à-dire que $(0,Y,Z) \in F(\mathcal{O} \cap \Sigma)$.

Corrigés des exercices et des problèmes - Année 2001-2002

Un corrigé du partiel du 29 novembre 2001 - Durée: 2h

Exercice I

1. – L'application L est linéaire. Cette application est donc $\mathcal{C}^\infty$ ssi elle est continue. Or $\|\mathrm{L}(f)\|_F \leq \|f\|_E$. Donc L est bien $\mathcal{C}^\infty$.

2. – L'application B est bilinéaire. Cette application est donc $\mathcal{C}^\infty$ ssi elle est continue. Or $\|B(u,v)\|_F = \sup\limits_{x\in[0;1]} |u(x).v(x)| \leq \sup\limits_{x\in[0;1]} |u(x)|. \sup\limits_{x\in[0;1]} |v(x)| = \|u\|_F.\|v\|_F$. Donc B est bien $\mathcal{C}^\infty$. De plus, d'après le cours: $\forall u,v,h,k \in F$, $DB_{(u,v)}(h,k) = u.k + h.v$.

3. – L'application φ est la composée suivante: $\varphi = B \circ (\mathrm{L},\mathrm{L})$. Donc L étant $\mathcal{C}^\infty$, (L,L) aussi, et B étant $\mathcal{C}^\infty$, φ est bien $\mathcal{C}^\infty$. Le théorème des applications composées assure alors que $\forall f,h \in E$, $D\varphi_{(f)}(h) = B(\mathrm{L}(f),\mathrm{L}(h)) + B(\mathrm{L}(h),\mathrm{L}(f)) = 2.f'.h'$.

4. – L'application Φ est la somme de φ et de l'application linéaire: $\ell : E \to F$, définie par $\ell(f) = f$ (autrement dit ℓ est l'inclusion de E dans F). Or $\|\ell(f)\|_F = \|f\|_F \leq \|f\|_E$, donc ℓ est une application $\mathcal{C}^\infty$. On en conclut que Φ est une application $\mathcal{C}^\infty$, et que $\forall f,h \in E$, $D\Phi_{(f)}(h) = 2.f'.h' + h$

5 . – Soit $f \in \Omega$. Comme f' ne s'annule pas sur $[0;1]$ et est continue sur $[0;1]$, il existe $c > 0$, tel que $\forall x \in [0;1]$, $|f'(x)| > c$. Si h est dans la boule ouverte de centre f et de rayon $c/2$ de E, on a: $\|f-h\|_E < c/2$, et en particulier $|f'(x) - h'(x)| < c/2$, pour tout $x \in [0;1]$, ce qui impose que $|h'(x)| \geq |f'(x)| - |h'(x) - f'(x)| \geq c - c/2 = c/2 > 0$, c'est-à-dire que $h \in \Omega$.

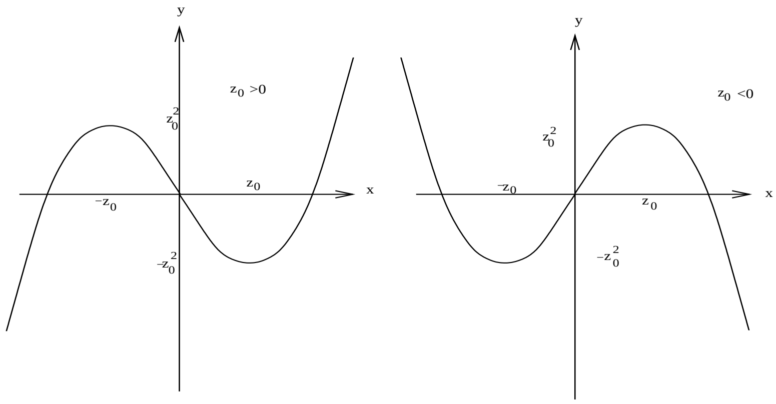
6.a. – Montrons que quel que soit $f \in \Omega$, $D\Phi_{(f)} : E \to F$ est bijective. Soit $g \in F$, on cherche à prouver qu'existe une unique application $h \in E$, telle que $2f'h' + h = g$. Or comme f' ne s'annule pas sur $[0;1]$, ceci revient à résoudre (de façon unique) dans E l'équation différentielle $h' + \dfrac{1}{2f'}.h = \dfrac{g}{2f'}$. Le théorème 1, assure que cette équation admet en effet une unique solution (cette équation est linéaire du premier ordre, et les éléments de E s'annulent tous en 0 !). $D\Phi_{(f)}$ est donc bien (linéaire continue) bijective.

6.b. – Le théorème 2, assure immédiatement, puisque E et F sont complets, que $[D\Phi_{(f)}]^{-1}$ est continue, ou encore que $D\Phi_{(f)} \in \mathcal{I}som(E;F)$.

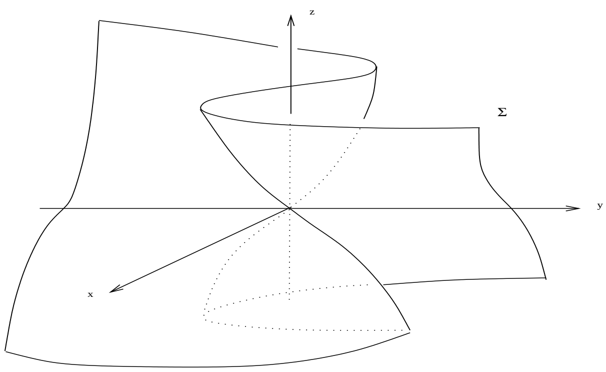
7 . – L'application Φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur E, et quel que soit $f \in \Omega$, $D\Phi_{(f)} \in \mathcal{I}som(E;F)$. Si $f_0 \in \Omega$, et si $g_0 = \Phi(f_0)$, le théorème d'inversion assure qu'existent deux voisinages ouverts Ω_{f_0} et Ω_{g_0}, respectivement dans E de f_0 et dans F de g_0, tels que $\Phi : \Omega_{f_0} \to \Omega_{g_0}$ soit un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme. En particulier, quel que soit $g_0 \in \Omega_{g_0}$, il existe un unique $f \in \Omega_{f_0}$ tel que $\Phi(f) = g$.

Exercice II

1 . – L'ensemble $\Sigma \cap \Pi_{z_0}$ est l'ensemble des points (x, y, z_0), avec $y = \dfrac{x^3}{2z_0} + \dfrac{3}{2}xz_0$, lorsque $z_0 \neq 0$; il s'agit du graphe d'un polynôme de degré 3, ayant l'allure suivante (selon que $z_0 > 0$, ou que $z_0 < 0$).



Si $z_0 = 0$, $\Sigma \cap \Pi_{z_0}$ est l'axe Oy. On en déduit l'allure générale de Σ.



2 . – Si $z \neq 0$, $(x, y, z) \in \Sigma$ ssi $y = \varphi_y(x, z) = \dfrac{x^3}{2z} + \dfrac{3}{2}xz$, et $\varphi_y : \Omega \to \mathbb{R}$ répond bien à la question, car est $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.

3 . – Soit $A = (a, b, c) \notin P_x$, c'est-à-dire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) \neq 0$. L'application $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $F((y, z), x) = f(x, y, z)$ est $\mathcal{C}^\infty$, car composée de f (qui est $\mathcal{C}^\infty$) et de l'isomorphisme linéaire $\mathrm{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, défini par $\mathrm{L}(x, y, z) = ((y, z), x)$. On a $F((b, c), a) = 0$ et $D_2F_{((b,c),a)} : \mathbb{R} \ni h \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(A).h \in \mathbb{R}$ qui est bien inversible, puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) \neq 0$. Le théorème de la fonction implicite assure qu'existent un voisinage $\Omega_{(b,c)}$ de (b, c) dans yOz, un voisinage Ω_a de a dans Ox, et une application $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi : \Omega_{(b,c)} \to \Omega_a$ telle que $\Sigma_F \cap (\Omega_{(b,c)} \times \Omega_a)$ soit le graphe de φ, ou encore en appliquant L^{-1}, telle que $\Sigma \cap (\Omega_a \times \Omega_{(b,c)})$ soit le graphe de φ.

4 . – Soit $A = (a, b, c) \in P_x$. La condition $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 0$ signifie que $x = +$ ou $-z$. P_x est donc constitué de $0_{\mathbb{R}^3}$ et des points de $\Sigma \cap \Pi_z$, quel que soit $z \in \mathbb{R}^*$, qui correspondent aux deux extrema locaux de$x \mapsto y = \dfrac{x^3}{2z} - \dfrac{3}{2}xz$. Si $\mathcal{U}$ est un voisinage (suffisament petit) de $A \neq 0$ dans $\mathbb{R}^3$ et si $\mathcal{V} = \pi_{yOz}(\mathcal{U})$ est le voisinage de (b, c) dans yOz obtenu en projetant $\mathcal{U}$ sur yOz, quel que soit $(y, z) \in \mathcal{V}$, $\Sigma \cap \mathcal{U}$ est coupé soit deux fois par la droite $\pi^{-1}(\{(y, z)\})$, soit une fois, soit zéro fois. Or si $\Sigma \cap \mathcal{U}$ était le graphe d'une application $\varpi_x : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, $\Sigma \cap \mathcal{U}$ ne serait coupé qu'une fois par la droite $\pi^{-1}(\{(y, z)\})$. Le même argument au voisinage de $0_{\mathbb{R}^3}$ conduit à: $\Sigma \cap \mathcal{U}$ est coupésoit trois fois par la droite $\pi^{-1}(\{(y, z)\})$, soit deux fois, soit une fois. On en conclut que $\Sigma_x = P_x$.

5 . – L'application F est $\mathcal{C}^\infty$, et sa matrice jacobienne en $A \notin P_x$ est de déterminant non nul puisqu'égale à:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(A) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(A) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(A) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le théorème d'inversion locale garantit alors qu'existent un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de A dans $\mathbb{R}^3$ et un voisinage ouvert Ω de $0_{\mathbb{R}^3}$ dans $\mathbb{R}^3$, tels que F établisse un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $\mathcal{O}$ sur Ω. Si $(x,y,z) \in \Sigma \cap \mathcal{O}$, $X = f(x,y,z) = 0$. Réciproquement, si $(X,Y,Z) \in \Omega$ et si $X = 0$, il existe $(x,y,z) \in \mathcal{O}$ tel que $(X,Y,Z) = F(x,y,z) = (f(x,y,z),y,z)$, et donc $f(x,y,z) = 0$, ce qui équivaut à dire que que $(x,y,z) \in \Sigma \cap \mathcal{O}$.

Aux points $A = (a,b,c)$ de Σ pour lequel le théorème de la fonction implicite s'applique (par exemple si $A \notin P_x$), la notion de plan tangent est bien définie (il s'agit du graphe de la fonction $\mathbb{R}^2 \ni \vec{h} \mapsto a + D\varphi_{(b,c)}(\vec{h} - (b,c)) \in \mathbb{R}$, où φ est donnée par le théorème de la fonction implicite), et d'après le cours, celui-ci est $A + \ker Df_{(A)}$, donc d'équation:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A)(X-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(Y-b)\frac{\partial f}{\partial z}(A)(Z-c) = 0,$$

soit:

$$(-3a^2 + 3c^2)(X-a) + 2c(Y-b) + (2y + 6xz)(Z-c) = 0$$

Calcul différentiel - Corrigé de l'examen du 24 janvier 2002

Problème . — **I.1.** – L'application $\widetilde{f}$ est différentiable en (x,y) si et seulement si existent une application linéaire $D\widetilde{f}_{(x,y)}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et une application $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de limite nulle en $(0,0)$, telles que: quel que soit $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, $\widetilde{f}(x+h, y+k) - \widetilde{f}(x,y) = D\widetilde{f}_{(x,y)}(h,k) + \|(h,k)\|\mu(h,k)$.

I.2. – Par hypoth èse, f est $\mathbb{C}$-dérivable, en notant $z = x+iy$ et $f'(z) = a+ib$, et en prenant les parties r éelles et imaginaires de de $(*)$, et en remarquant que $|h+ik| = \|(h,k)\|$, on obtient:

$$p(x+h, y+k) - p(x,y) = ah - bk + \|(h,k)\|\mathrm{Re}(\epsilon(h,k))$$

$$q(x+h, y+k) - q(x,y) = ak + bh + \|(h,k)\|\mathrm{Im}(\epsilon(h,k)).$$

C'est-à-dire que:

$$\widetilde{f}((x+h, y+k) - \widetilde{f}(x,y) = \mathrm{L}(h,k) + \|(h,k)\|\mu(h,k)$$

où $\mathrm{L} : (h,k) \mapsto (ah - bk, ak + bh)$ est une application lin éaire et où $\mu = (\mathrm{Re}(\epsilon), \mathrm{Im}(\epsilon))$ est de limite $(0,0)$ en $(0,0)$, par continuit é de Re et de Im. $\widetilde{f}$ est donc diff érentiable, et de plus:

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x,y) = a = \mathrm{Re}[f'(z)], \quad \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) = -b = -\mathrm{Im}[f'(z)]$$
$$\frac{\partial q}{\partial x}(x,y) = b = \mathrm{Im}[f'(z)], \quad \frac{\partial q}{\partial y}(x,y) = a = \mathrm{Re}[f'(z)]$$

I.3. – $(x,y) \in S_{\widetilde{f}}$ si et seulement le d éterminant de la matrice jacobienne de $\widetilde{f}$ en (x,y) est nul. Or par I.2, ce d éterminant est $a^2 + b^2 = |f'(x+iy)|^2$. Donc $(x,y) \in S_{\widetilde{f}}$ ssi $f'(x+iy) = 0$.

II.1. – Un polynôme ayant un nombre fini de racines, $S_{\widetilde{f}}$, qui est l'ensemble des racines du polynôme f' est fini. Son image $\Delta_{\widetilde{f}}$ par $\widetilde{f}$ est aussi fini. $\mathbb{R}^2$ priv é d'un nombre fini de points est un ouvert connexe, car connexe par arcs.

II.2. f' est un polynôme, donc continu. Par I.2. on en d éduit que les d ériv ées partielles de $\widetilde{f}$ sont continues (par continuit é de Re et de Im), et donc que $\widetilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$. Soit alors $v \in \Omega$ et u un ant éc édent de v. N écessairement, puisque $v \notin \Delta_{\widetilde{f}} = \widetilde{f}(S_{\widetilde{f}})$, $u \notin S_{\widetilde{f}}$, et $D\widetilde{f}_{(u)}$ est inversible. Le th éor éme d'inversion locale assure alors qu'existent des voisinages ouverts $\mathcal{O}_u$ et $\mathcal{O}_v$ respectivement de u et v, tels que $\widetilde{f}_{|\mathcal{O}_u} : \mathcal{O}_u \to \mathcal{O}_v$ soit un $\mathcal{C}^1$-diff éomorphisme. Quitte à r éduire $\mathcal{O}_v$, on peut supposer que $\mathcal{O}_v$ est inclus dans Ω, puisque Ω est un ouvert. En particulier, $\widetilde{f}_{|\mathcal{O}_u} : \mathcal{O}_u \to \mathcal{O}_v$ est bijective, et tout $t \in \mathcal{O}_v$ admet un (unique) ant éc édent par $\widetilde{f}$ dans $\mathcal{O}_u$, ie $\mathcal{O}_v \subset \widetilde{f}(\mathbb{R}^2)$. On vient de prouver que $\mathcal{O}_v$ est un voisinage de v inclus dans $\Omega \cap \widetilde{f}(\mathbb{R}^2)$, donc que $\Omega \cap \widetilde{f}(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

II.3. Soit $v \in \Omega \setminus \widetilde{f}(\mathbb{R}^2)$, et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\widetilde{f}(\mathbb{R}^2)$ de limite v. On note u_n un ant éc édent de v_n. S'il existe une sous-suite born ée de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut en extraire une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers u. Or comme quel que soit k, $\widetilde{f}(u_{n_k}) = v_{n_k}$ a our limite v, par continuit é de $\widetilde{f}$, on obtient $\widetilde{f}(u) = v$, ie $v \in \widetilde{f}(\mathbb{R}^2)$. Ce qui est contradictoire. On en conclut que $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \infty$. Mais comme f est un polynôme, $\lim\limits_{n\to\infty} |f(u_n)| = \infty \neq v$! On a donc prouv é que $\Omega \setminus \widetilde{f}(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert.

II.4. Le connexe Ω est r éunion des deux ouverts $\Omega \setminus \widetilde{f}(\mathbb{R}^2)$ et $\Omega \cap \widetilde{f}(\mathbb{R}^2)$, donc égal à l'un d'eux; ie que les points de Ω ont soit tous un ant éc édent par $\widetilde{f}$, soit aucun.

II.5. Si les points de Ω n'ont pas d'ant éc édent par $\widetilde{f}$, les seules valeurs de $\widetilde{f}$ sont donc les él éments de $\Delta_{\widetilde{f}}$, qui est fini. Or un polynôme ne peut pas prendre qu'un nombre fini de valeurs (puisque par exemple $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$). On en conclut que les points de Ω ont tous un ant éc édent par $\widetilde{f}$. Or $\mathbb{R}^2 = \widetilde{f}(S_{\widetilde{f}}) \cup \Omega$, donc tous les points de $\mathbb{R}^2$ ont un ant éc édent par $\widetilde{f}$, et ainsi $\widetilde{f}$ est surjective.

II.6. $\widetilde{f}$ étant surjective, $(0,0)$ admet un ant éc édent par $\widetilde{f}$, donc f admet (au moins) une racine; ce qui prouve le th éorème fondamental de l'algèbre.

Question subsidiaire. Soit $v \in \Omega \cap \widetilde{f}(\mathbb{R}^2)$. Les ant éc édents de v par $\widetilde{f}$ sont en nombre fini, puisque le polynôme $f(z) - v$ n'a qu'un nombre fini de racines. On note $u_i, \ldots, u_p$ ces ant éc édents. On est sûr que $D\widetilde{f}_{(u_j)}$ est inversible, puisque $v \notin \Delta_{\widetilde{f}} = \widetilde{f}(S_{\widetilde{f}})$. La question II.2. assure qu'existent des voisinages ouverts $\mathcal{O}_{v,1}, \ldots, \mathcal{O}_{v,p}$ de v dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{O}_{u_1}, \ldots, \mathcal{O}_{u_p}$ de $u_1, \ldots, u_p$ dans $\mathbb{R}^2$, tels que $\widetilde{f}_{|\mathcal{O}_{u_j}} : \mathcal{O}_{u_j} \to \mathcal{O}_{v,j}$ soient bijectives, $1 \leq j \leq p$. Quitte à restreindre les $\mathcal{O}_{u_j}$, on peut supposer qu'ils sont deux à deux disjoints. Notons $\Omega_v = \bigcap\limits_{j=1}^{p} \mathcal{O}_{v,j}$ et $\Omega_{u_j} = \widetilde{f}^{-1}(\Omega_v) \cap \mathcal{O}_{u_j}$. $\widetilde{f}_{|\Omega_{u_j}} : \Omega_{u_j} \to \Omega_v$ est bijective, quel que soit $1 \leq j \leq p$, et comme les $\mathcal{O}_{u_j}$ sont deux à deux disjoints,

l' équation $t = \widetilde{f}(s)$ posséde au moins p racines distinctes respectivement dans $\mathcal{O}_{u_1}, \ldots, \mathcal{O}_{u_p}$.

En r éalit é le nombre de ces racines est exactement p. En effet si l' équation $t_n = \widetilde{f}(s)$ poss éde une racine s_n hors des voisisnages $\mathcal{O}_{u_j}$, quel que soit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers v, on montre que $|s_n| \to \infty$, ce qui contredit $\widetilde{f}(s_n) = t_n \to v$ (proc éder comme dans II.3.). On vient de prouver que la fonction qui à $v \in \Omega$ associe le nombre d'ant éc édents de v par $\widetilde{f}$ est localement constante sur Ω: elle vaut 0 sur $\Omega \setminus \widetilde{f}(\mathbb{R}^2)$ et est loc. constante sur $\Omega \cap \widetilde{f}(\mathbb{R}^2)$. Comme Ω est connexe, cette fonction est en r éalit é constante sur Ω. Par II.5., elle ne vaut pas 0, et donc elle vaut $p > 0$. (On montre que $p = deg(f)$. Ce r ésultat s'énonce ainsi: $\widetilde{f}$ est un revêtement de degré $deg(f)$ en dehors des valeurs critiques $\Delta_{\widetilde{f}}$.

Corrigés des exercices et des problèmes - Année 2002-2003

Corrigé de l'examen partiel du 21 novembre 2002

Questions de cours. — **1.** – $A \Longrightarrow B, B \not\Longrightarrow, A \not\Longrightarrow C, C \Longrightarrow A, C \Longrightarrow B, B \not\Longrightarrow C$ (on trouve les contre-exemples dans le cours).

2. – $f : \Omega \to \mathcal{U}$ est un difféomorphisme ssi f établit une bijection entre Ω et $\mathcal{U}$, f est différentiable sur Ω **et** f^{-1} est différentiable sur $\mathcal{U}$. Si f est de plus $\mathcal{C}^k$ sur Ω $(k \geq 1)$, on sait que f^{-1} est aussi $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$, dès que E **et** F **sont complets (Théorème 3.5).**

3. – Théorème de la moyenne : Soient E et F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application différentiable sur Ω. Soient $a, b \in \Omega$ tels que $[a,b] \in \Omega$, on a alors : $\|f(b)-f(a)\| \leq \sup\limits_{\xi\in[a,b]} \|Df_{(\xi)}(b-a)\|_F \leq \sup\limits_{\xi\in[a,b]} \|Df_{(\xi)}\|_{\mathcal{L}(E;F)} \cdot \|b-a\|_E$.

Exercice I . — **1 .** – L'application $\mathfrak{B}$ est bilinéaire, et $\forall f, g \in E$, $\|\mathfrak{B}(f,g)\|_\infty = \|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$, puisque la majoration $\forall t \in [0,1], |f(t) \cdot g(t)| \leq |f(t)| \cdot |g(t)| \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$, donne $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$. On en déduit la continuité de $\mathfrak{B}$, donc le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathfrak{B}$.
L'application Δ est linéaire. La continuité résulte de l'égalité : $\forall f \in E$, $\|\Delta(f)\|_{E\times E} = \|f\|_\infty$. Δ est ainsi $\mathcal{C}^\infty$.
2 . – On a : $\mathfrak{b} = \mathfrak{B} \circ \Delta$. Le Théorème des applications composées et la question précédente montrent alors que $\mathfrak{b}$ est $\mathcal{C}^\infty$. De plus : $\forall f \in E, \forall h \in E, D\mathfrak{b}_{(f)}(h) = (D\mathfrak{B}_{(f,f)} \circ D\Delta_{(f)})(h) = D\mathfrak{B}_{(f,f)}(\Delta(h)) = D\mathfrak{B}_{(f,f)}(h,h) = 2 \cdot f \cdot h$.
3 . – L'application L est linéaire. Ceci résulte directement de la structure d'espace vectoriel de E et de la définition du symbole $\circ$: $\forall f, u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathrm{L}(f + \lambda \cdot u) = (f + \lambda \cdot h) \circ g = f \circ g + \lambda \cdot u \circ g = \mathrm{L}(f) + \lambda \cdot \mathrm{L}(u)$. De plus $\|\mathrm{L}(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, donc L est $\mathcal{C}^\infty$.
4 . – On a $\Phi = \beta \circ (\mathrm{L}, \mathfrak{b})$. Comme β est bilinéaire continue par hypothèse, β est $\mathcal{C}^\infty$. Le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de L et $\mathfrak{b}$ donne le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de Φ ($(\mathrm{L}, \mathfrak{B})$ est $\mathcal{C}^\infty$ car ses deux composantes le sont). On a alors : $\forall f \in E, \forall h \in E, D\Phi_{(f)}(h) = D\beta_{(f\circ g, f^2)}(\mathrm{L}(h), D\mathfrak{b}_{(f)}(h)) = \beta(f \circ g, 2 \cdot f \cdot h) + \beta(h \circ g, f^2)$.
5 . – L'application Ψ est linéaire et $\forall f, h \in E$, $\|\,[\Psi(f)](h)\,\|_\infty \leq 2\|h\|_\infty \cdot \|f\|_\infty + \|h\|_\infty \cdot \|f\|_\infty = 3\|h\|_\infty \cdot \|f\|_\infty$. On en déduit que $\forall f \in E$, $\|\Psi(f)\|_{\mathcal{L}(E;E)} \leq 3\|f\|_\infty$. Ψ est ainsi continue, donc $\mathcal{C}^\infty$.
φ est bilinéaire et $\forall f, h \in E, \ell \in \mathcal{L}(E;E)$, $\|\,[\varphi(f,\ell)](h)\|_\infty = \|f \cdot \ell(h)\| \leq \|f\|_\infty \cdot \|\ell(h)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|\ell\|_{L(E;E)} \cdot \|h\|_\infty$. Ce qui donne $\|\varphi(f,\ell)\|_{L(E;E)} \leq \|f\| \cdot \|\ell\|$ et prouve la continuité de φ. L'application φ est ainsi $\mathcal{C}^\infty$.
Comme $\mathfrak{B} = \beta$, $\forall f \in E, \forall h \in E, D\Phi_{(f)}(h) = 2 \cdot f \cdot h \cdot (f \circ g) + f^2 \cdot (h \circ g) = f[2 \cdot h \cdot (f \circ g) + (h \circ g) \cdot f] = f \cdot [[\Psi(f)](h)] = [\varphi(f, \Psi(f))](h)$, d'où $\forall f \in E, D\Phi_{(f)} = [\varphi(f, \Psi(f))]$, et ainsi $D\Phi = \varphi \circ (\mathrm{Id}_E, \Psi)$.
Par le théorème des applications composées, on en déduit : $\forall f, h \in E$, $D^2\Phi_{(f)}(h) = D\varphi_{(f,\Psi(f))}(h, \Psi(h)) = \varphi(f, \Psi(h)) + \varphi(h, \Psi(f))$. On en conclut que : $\forall f, h, k \in E$, $D^2\Phi_{(f)}(h)(k) = \varphi(f, \Psi(h))(k) + \varphi(h, \Psi(f))(k) = f \cdot [2 \cdot k \cdot (h \circ g) + (k \circ g) \cdot h] + h \cdot [2 \cdot k \cdot (f \circ g) + (k \circ g) \cdot f]$. Noter que $E \times E \ni (h,k) \mapsto D^2\Phi_{(f)}(h)(k) \in E$ est bien bilinéaire.

Exercice II . — **1 .** – Soit $a \in \Omega$, on considère $\mathcal{C}_a = \{b \in \Omega, \exists \ell(a, \cdots, b)\}$. Soit alors $b \in \mathcal{C}_a$ et $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(b,r)$ de centre b et de rayon r soit contenue dans Ω. L'existence d'un tel r est garantie par le fait que Ω est ouvert. Si $c \in B(b,r)$, la convexité de la boule $B(b,r)$ (†) assure que le segment $[a,c]$ est contenu dans la boule $B(b,r)$, et donc dans Ω. Comme il existe $\ell(a, \cdots, b) \subset \Omega$, on en déduit que $\ell(a, \cdots, b) \cup [b,c] \subset \Omega$ ie $c \in \mathcal{C}_a$. On a donc prouvé que $B(b,r) \subset \mathcal{C}_a$, ce qui montre que $\mathcal{C}_a$ est un ouvert (‡).

2 . – Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_a$. Quelle que soit la ligne brisée $\ell(\alpha, \cdots, \beta) = \bigcup\limits_{j=0}^{p-1} [a_j, a_{j+1}]$ joignant α à β (ie $a_0 = \alpha, a_p = \beta$), comme f est différentiable sur Ω et comme $\forall j \in [0, p-1]$, $[a_j, a_{j+1}] \subset \mathcal{C}_a \subset \Omega$, le théorème de la moyenne donne :

(†) Dans tout espace vectoriel normé une boule (ouverte ou fermée) est convexe. Soit en effet $B(a,R)$ une boule (disons ouverte) de centre a et de rayon R d'un evn $(E, \|\ \|)$. Soient $x, y \in B(a,R)$. $z \in [x,y]$ ssi il existe $t \in [0,1]$ tel que $z = (1-t)x + ty$. On a alors $\|z-a\| = \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| \leq (1-t)\|x-a\| + t\|y-a\| < (1-t)R + tR = R$, donc $z \in B(a,R)$.

(‡) Comme $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, l'ensemble des classes d'équivalence par $\mathcal{R}$ forme une partition de Ω. On peut écrire : $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{C}_{a_i}$, avec I un ensemble d'indices tel que $i \neq j \Longrightarrow \mathcal{C}_{a_i} \cap \mathcal{C}_{a_j} = \emptyset$. Comme $\mathcal{C}_{a_j} = \Omega \setminus \bigcup\limits_{i\in I, i\neq j} \mathcal{C}_{a_i}$, et comme $\bigcup\limits_{i\in I, i\neq j} \mathcal{C}_{a_i}$ est un ouvert de Ω (puisque chaque $\mathcal{C}_{a_i}$ est ouvert par la question 1), on en conclut que chaque classe $\mathcal{C}_a$ est aussi un fermé de Ω. Les classes sont ainsi les composantes connexes de Ω, et si Ω est connexe, $\forall a \in \Omega$, $\mathcal{C}_a = \Omega$. Ce qui montre que si Ω est connexe, deux points de Ω peuvent être joints par une ligne brisée de Ω, et donc que Ω est connexe par arcs.

$\|f(a_{j+1}-a_j)\|_F \leq \sup\limits_{\xi\in[a_j,a_{j+1}]} \|Df_{(\xi)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;F)}\|a_{j+1}-a_j\| \leq \sup\limits_{\xi\in\mathcal{C}_a} \|Df_{(\xi)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;F)}\|a_{j+1}-a_j\|$. On en déduit, grâce à l'inégalité triangulaire, que : $\|f(\beta)-f(\alpha)\|_F \leq \sum\limits_{j=0}^{p-1} \|f(a_{j+1}-a_j)\| \leq \sup\limits_{\xi\in\mathcal{C}_a} \|Df_{(\xi)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;F)} \sum\limits_{j=0}^{p-1} \|a_{j+1}-a_j\|$. Donc quelle que soit la ligne brisée $\ell(\alpha,\cdots,\beta)$: $\|f(\beta)-f(\alpha)\|_F \leq \sup\limits_{\xi\in\mathcal{C}_a} \|Df_{(\xi)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;F)}|\ell(\alpha,\cdots,\beta)|$. Cette dernière majoration donne enfin : $\|f(\beta)-f(\alpha)\|_F \leq \sup\limits_{\xi\in\mathcal{C}_a} \|Df_{(\xi)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;F)} \cdot d(\alpha,\beta)$.

Un corrigé de l'examen du 6 février 2003

Exercice I . — **I.1.** – L'application Π_n est n-linéaire. Sa continuité vient de la majoration : $\|\Pi_n(f_1,\cdots,f_n)\| \leq \|f_1\|\cdots\|f_n\|$. Cette application est par conséquent $\mathcal{C}^\infty$, et quels que soient $(f_1,\cdots,f_n),(h_1,\cdots,h_n)\in E^n$, $D\Pi_{n(f_1,\cdots,f_n)}(h_1,\cdots,h_n)=\sum_{j=1}^{n} f_1\cdots f_{j-1}h_jf_{j+1}\cdots f_n$.

I.2. – Les applications $\mathcal{C}os : E\to E$ et $\mathcal{S}in : E\to E$ définies par $\mathcal{C}os(f)=\cos\circ f$ et $\mathcal{S}in(f)=\sin\circ f$ sont $\mathcal{C}^\infty$ (voir Exercice I de l'examen de septembre 2003, ou réaliser ces applications comme séries d'applications $\mathcal{C}^\infty$) et de plus $D\mathcal{C}os_f(h)=-h\mathcal{S}in(f)$ et $D\mathcal{S}in_f(h)=h\mathcal{C}os(f)$. Notons $p : E\to E^n$ l'application linéaire (dont on montre facilement qu'elle est continue) définie par : $p(f)=(f,\cdots,f)$. Comme $F_n=\mathcal{C}os\circ\Pi_n\circ p$ et $G_n=\mathcal{S}in\circ\Pi_n\circ p$, on déduit de la prèmière question que F_n et G_n sont $\mathcal{C}^\infty$ et que : quels que soient $f,h\in E$:

$$DF_{n(f)}(h)=-n.h.f^{n-1}.G_n(f),\qquad DG_{n(f)}(h)=n.h.f^{n-1}.F_n(f)$$

I.3. – L'application Φ est linéaire. De plus $\|\Phi(f)(h)\|\leq\|f\|.\|h\|$, ce qui prouve que $\|\Phi(f)\|_{\mathcal{L}(E;E)}\leq\|f\|$ et que Φ est continue (et que $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;E))}\leq 1$). On en conclut que Φ est $\mathcal{C}^\infty$. On peut aussi remarquer que $\widetilde{\Phi}$ définie par $\widetilde{\Phi}(f,h)=\Phi(f)(h)$ est l'application Π_2, qui par la première question est bilinéaire continue, puis invoquer l'isomorphisme $\widetilde{\ }:\mathcal{L}(E,E;E)\to\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;E))$.

I.4. – On a : $DF_n=-n.\Phi\circ\Pi_2\circ(\Pi_{n-1},G_n)$ et $DG_n=n.\Phi\circ\Pi_2\circ(\Pi_{n-1},F_n)$. Par le Théorème des applications composées, F_n et G_n sont $\mathcal{C}^\infty$. On remarque que pour obtenir ce résultat, il suffit de prouver que F_n et G_n sont différentiables (par une récurrence croisée que permettent les expressions de DF_n et DG_n).

I.5. – Le théorème de la moyenne montre que quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $|\sin(x)|\leq sup_{\mathbb{R}}|\cos(x)|.|x|\leq|x|$. On en déduit que quel que soit $f\in B_R$, $\|F_n(f)\|\leq\|f^n\|<R$ et donc, puisque E est complet, que quel que soit $f\in B_R$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nF_n(f)$ est convergente et définit par conséquent bien un élément de E.

I.6. – On a : $\|DF_{n(f)}(h)\|\leq n\|h\|.\|f\|^{n-1}$, Ce qui donne : $\|DF_{n(f)}\|\leq n.\|f\|^{n-1}$. Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}n.a_n.r^n$ a même rayon de convergence R que la série dont elle est la dérivée. On en conclut que la série $f\mapsto\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n.DF_{n(f)}$ est localement uniformément convergente sur B_R. Par le Théorème du cours relatif à la différentiabilité des séries, on en conclut que $f\mapsto S(f)$ est différentiable sur B_R (en réalité $\mathcal{C}^\infty$, il suffit de majorer de la même façon toutes les différentielles), et $DS=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n.DF_n$.

Problème

I.1. – $(x,y)\in V$ ssi $y^3+2zy-z^2=0$. En résolvant cette équation du second degré en z, on obtient : $(x,y)\in V$ ssi $z=y\pm|y|\sqrt{1+y}$. Comme $z\geq 0$, nécessairement $y\geq 0$, et dans ce cas la seule solution permise est : $z=y+y\sqrt{1+y}$. On en déduit que $(x,y)\in V$ ssi $x=\sqrt{y+y\sqrt{1+y}}$ ou $x=-\sqrt{y+y\sqrt{1+y}}$. On en conclut, en notant $\psi_- : [0,+\infty[\ni y\mapsto\sqrt{y+y\sqrt{1+y}}\in\mathbb{R}_-$ et $\psi_+ : [0,+\infty[\ni y\mapsto\sqrt{y+y\sqrt{1+y}}\in\mathbb{R}_+$ que $\{(x,y)\in V; x\leq 0\}$ est le graphe de ψ_- et $\{(x,y)\in V; x\geq 0\}$ est le graphe de ψ_+. On vérifie facilement par le calcul que $\lim_{y\to 0^+}\psi'_-(y)=-\infty$ et $\lim_{y\to 0^+}\psi'_+(y)=+\infty$.

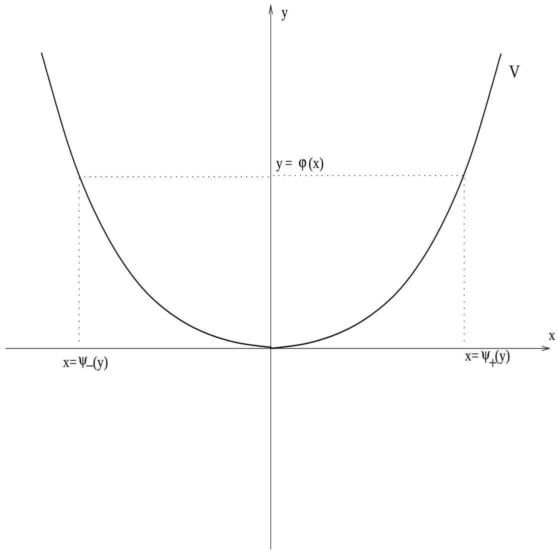
I.2. – Comme ψ_+ et ψ_- sont continues et comme $\psi_+(0)=\psi_-(0)$, $\lim_{y\to+\infty}\psi_+(y)=+\infty$, $\lim_{y\to+\infty}\psi_-(y)=-\infty$, par le théorème des valeurs intermédiaires, on a : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, il existe $y_x\in\mathbb{R}_+$ tel que (x,y_x) est dans le graphe de ψ_+. Par stricte monotonie de ψ_+, y_x est unique. De même $\forall x\in\mathbb{R}_-^*$, il existe $y_x\in\mathbb{R}_-$ tel que (x,y_x) est dans le graphe de ψ_+ et par stricte monotonie de ψ_-, y_x est unique. On a donc défini une application $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, par $\varphi(x)=y_x$. Le graphe de φ est V, et par construction la restriction φ_+ de φ à $\mathbb{R}_+$ est bijective, d'inverse ψ_+. De même la restriction φ_- de φ à $\mathbb{R}_-$ est bijective, d'inverse ψ_-.

I.3. – f est $\mathcal{C}^\infty$ et quel que soit (x,y) in V tel que $x\neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2+2x^2\neq 0$. Par le théorème de la fonction implicite, l'application qui à x associe y_x est $\mathcal{C}^\infty$. Mais cette application est φ.

Comme la restriction de φ à $\mathbb{R}_+$ a pour inverse ψ_+, par la question 1 on obtient $\lim_{x\to 0^+}\varphi'(x)=1/\lim_{y\to 0^+}\psi'_+(y)=0$ et de même $\lim_{x\to 0^-}\varphi'(x)=1/\lim_{y\to 0^+}\psi'_-(y)=0$. C'est-à-dire que $\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=0$.

I.4. – φ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, le théorème des accroissements finis assure que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ existe $\theta_x\in]0,x[$ tel que : $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\varphi'(\theta_x)$, on en conclut que : $\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\varphi'(\theta_x)=0$. Autrement dit φ est dérivable à droite, de dérivée nulle. Les mêmes arguments montrent que φ est dérivable à gauche, de dérivée nulle. On en conclut que φ est dérivable en 0, de dérivée nulle. De plus comme $\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\varphi'(0)$ et φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, on a : φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

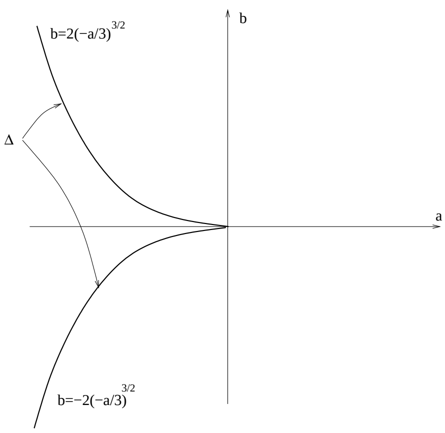
I.5. – Le théorème de la fonction implicite ne s'applique pas en $(0,0)$, car $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. On ne peut donc pas appliquer ce théorème pour montrer que V est localement en $(0,0)$ le graphe d'une application $\mathcal{C}^1$, au-dessus des x. Cependant comme le montre la question précédente, V est localement en $(0,0)$ le graphe de l'application φ, qui est $\mathcal{C}^1$ au-dessus des x. Cette étude montre que la réciproque du théorème de la fonction implicite n'a pas lieu.



II.1. – Comme $F_{(a,b)}$ est de degré 3, il est le produit soit de trois polynômes de degré 1, soit en d'un polynôme de degré 1 et d'un polynôme irréductible de degré 2. Dans le premier cas $F_{(a,b)}$ possède trois racines, et une seule dans le second.

II.2. – y_0 est racine multiple de $F_{(a,b)}$ ssi $F'_{(a,b)}(y_0) = F_{(a,b)}(y_0) = 0$, ie ssi $(a,b,y_0) \in H \cap \Sigma$. Par définition, Δ est l'ensemble des paramètres (a,b) tels que $F_{(a,b)}$ possède une racine multiple, on en déduit que Δ est la projection de $H \cap \Sigma$ sur $\mathbb{R}^2_{(a,b)}$.

II.3. – $(a,b) \in \Delta$ ssi $F'_{(a,b)}(y_0) = F_{(a,b)}(y_0) = 0$ ssi $3y^2 + a = 0$ et $y^3 + ay + b = 0$. On en déduit que $y = \pm\, (-a/3)^{1/2}$ et $b = -y^3 - ay$. Finalement $(a,b) \in \Delta$ ssi $b = 2(-a/3)^{3/2}$ ou $b = -2(-a/3)^{3/2}$. On en déduit l'allure de Δ et que le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}^2_{a,b} \setminus \Delta$ est deux.



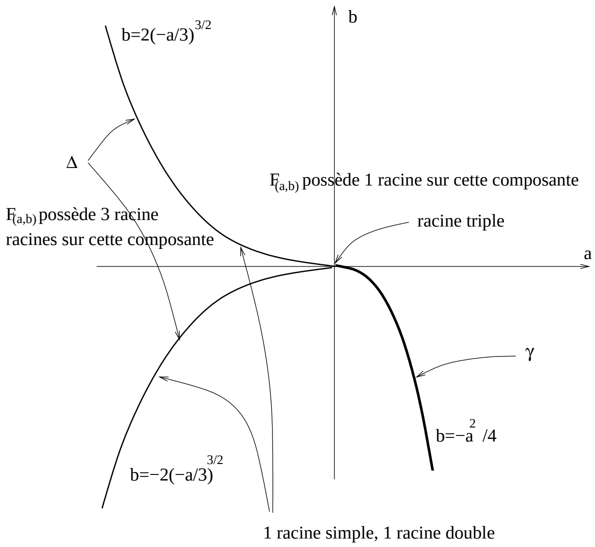
II.4. – Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2_{a,b}$ tel que $F_{(a,b)}$ possède trois racines distinctes y_1, y_2, y_3. Nécessairement $(a,b) \notin \Delta$, et donc (a,b,y_1), (a,b,y_2), (a,b,y_3), ne sont pas dans Σ. On a alors : $F'_{(a,b)}(y_1) \neq 0$, $i \in \{1,2,3\}$. En applicant le théorème de la fonction implicite à F en chacun des points (a,b,y_i) de H, on obtient l'existence de voisinages ouverts Ω_i de (a,b) dans $\mathbb{R}^2_{(a,b)}$ et I_{y_i} de y_i dans $\mathbb{R}$ et d'applications $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi_i : \Omega_i \to I_{y_i}$, telles que $H \cap \Omega_i \times I_{y_i}$ =Graphe(φ_i). Comme les y_i sont distincts, on peut supposer, quitte à restreindre chaque I_{y_i}, que ces intervalles sont disjoints. On peut aussi poser $\Omega_{(a,b)} = \cap_{i=1}^3 \Omega_i$. On en déduit que si $(\alpha,\beta) \in \Omega_{(a,b)}$, $\varphi_1(\alpha,\beta), \varphi_2(\alpha,\beta), \varphi_3(\alpha,\beta)$ sont trois racines de $F_{\alpha,\beta}$, distinctes puisque les intervalles I_{y_i} sont deux à deux disjoints.

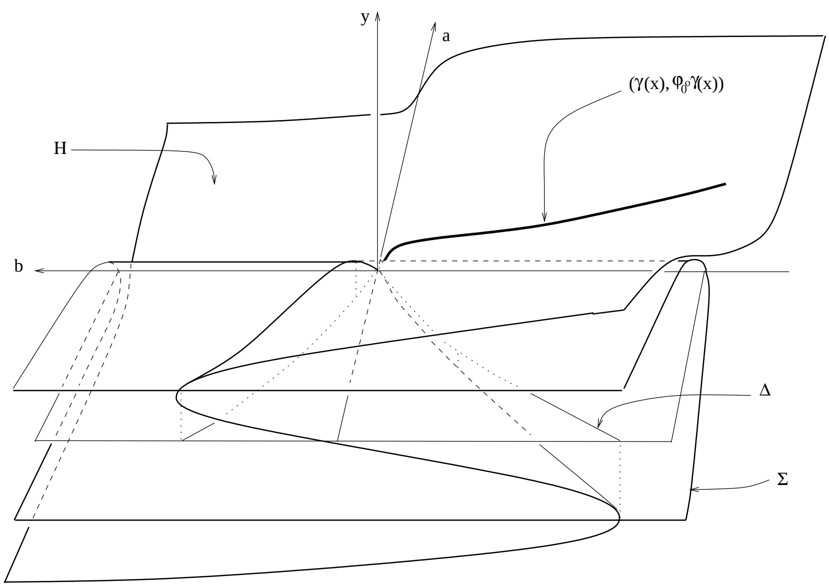
II.5.a.b – Si (a,b) est tel que $F_{a,b}$ ne possède qu'une racine y_0, $(a,b) \notin \Delta$, et comme pour la question précédente, le théorème de la fonction implicite donne l'existence d'applications $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi_0 : \mathcal{U}_{(a,b)} \to I_0$, où $\mathcal{U}_{(a,b)}$

est un vosinage ouvert de (a,b) dans $\mathbb{R}^2_{a,b}$, I_0 un voisinage ouvert de y_0 dans $\mathbb{R}$ et $H \cap (\mathcal{U}_{(a,b)} \times I_0)$ est le graphe de φ_0. On en déduit que si $(\alpha,\beta) \in \mathcal{U}_{(a,b)}$, $\varphi_0(\alpha,\beta)$ est une racine de $F_{\alpha,\beta}$. On peut alors écrire $F_{\alpha\beta}(y) = (y-\varphi_0(\alpha,\beta))(y^2+By+C) = y^3+\alpha y+\beta$. On obtient par dentification : $B = \varphi_0(\alpha,\beta)$ et $C = \alpha - \varphi_0^2(\alpha,\beta)$. Le discriminant de $y^2 + By + C)$ est par conséquent une fonction continue de (α,β). Or ce discriminant est par hypothèse strictement négatif en (a,b); il le reste donc dans un vosinage de (a,b) inclus dans $\mathcal{U}_0$ et par suite, pour (α,β) est dans ce voisinage, $F_{\alpha,\beta}$ ne possède pour racine que $\varphi_0(\alpha,\beta)$.

II.6. – Les questions 4 et 5 montrent que ν est une fonction localement constante sur $\mathbb{R}^2_{a,b} \setminus \Delta$, et donc constante sur les deux composantes connexes de $\mathbb{R}^2_{a,b} \setminus \Delta$ (égale à 1 ou 3).

II.7. – L'arc γ, d'équation ($b = -a^2/4, a \geq 0$), rencontre Δ seulement en $(0,0)$, car les systèmes $b = -a^2/4$, $b = 2(-a/3)^{3/2}$ et $b = -a^2/4$, $b = -2(-a/3)^{3/2}$ n'ont que $(0,0)$ pour solution. L'arc $\gamma\setminus\{0\}$, d'équation ($b = -a^2/4, a > 0$), étant connexe, il est contenu dans une des deux composantes connexes de $\mathbb{R}^2_{a,b}\setminus\Delta$. Comme cette composante connexe est aussi celle de $(1,0)$, et que $F_{1,0}(y) = y(y^2+1)$ n'a qu'une seule racine, quel que soit $(\alpha,\beta) \in \gamma(\mathbb{R}^*)$, $F_{\alpha,\beta}$ n'a qu'une seule racine $\varphi_0(\alpha,\beta)$. Par le théorème des applications composées, l'application $\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \mapsto y = \varphi_0(2x^2,-x^4) \in \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$. Le graphe de cette application est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{a,b}; F_{2x^2,-x^4}(y) = 0, x \neq 0\} = V \setminus \{(0,0)\}$





Un corrigé de l'examen du 4 septembre 2003

Exercice I . — I.1.a – La fonction g est dérivable sur $]0,1[$ et continue sur $[0,1]$, puisque dérivable sur $\mathbb{R}$. Le théorème des accroissements finis donne l'existence d'un réel $\zeta \in]0,1[$ tel que : $g(1)-g(0)=g'(\zeta)(1-0)$. Or $g'(\zeta)=k.(\varphi'(y+\zeta\cdot k)-\varphi'(y))$. Il suffit alors de poser $y+\zeta\cdot k=\xi$, car $\xi\in[y,y+k]$.

I.1.b – On remplace y par $f(x)$ et k par $h(x)$ dans $(*)$.

I.1.c – f étant continue, $f([0,1])$ est un intervalle fermé et borné. Notons-le $[a,b]$. Comme par hypothèse $\|h\|\leq 1$, $(f+h)([0,1])\subset [a-1,b+1]$.

I.1.d – Sur l'intervalle I, φ' est uniformément continue. Étant donné $\epsilon>0$, il existe alors $\eta>0$ tel que $|\xi-y|\leq\eta \Longrightarrow |\varphi'(\xi)-\varphi'(y)|\leq\epsilon$. Or si $\|h\|\leq\eta$, quel que soit $x\in[0,1]$, $|f(x)-\xi_x|\leq\eta$, lorsque $\xi_x\in[f(x),f(x)+h(x)]$. L'inégalité $(**)$ donne alors l'inégalité demandée.

I.1.e – Par la question précédente, la définition de la différentiabilité de Φ en f est vérifiée et de plus $D\Phi_{(f)}: E\ni h\mapsto h.\varphi'\circ f\in E$ ssi l'application $E\ni h\mapsto h.\varphi'\circ f\in E$ est linéaire et continue. La linéarité est immédiate, et comme $\|h.\varphi'\circ f\|\leq\|h\|\cdot\sup_{u\in I}|\varphi'(u)|$ et que φ' est continue sur I, donc bornée sur I, la continuité est établie.

I.2.a – L est facilement linéaire et comme $\|\mathrm{L}(u)(h)\|\leq\|u\|.\|h\|$, on en déduit que L est continue et que $\|\mathrm{L}(u)\|_{\mathcal{L}(E;E)}\leq\|u\|$. L'application L étant facilement linéaire, la dernière inégalité prouve la continuité de L et ainsi son caractère $\mathcal{C}^\infty$. De plus $\|\mathrm{L}\|_{\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;E))}\leq 1$.

I.2.b – On a clairement $D\Phi=\mathrm{L}\circ\widetilde{\Phi}$.

I.2.c – Soit $f\in E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E de limite nulle (on peut supposer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|f_n\|\leq 1$). On en déduit, comme à la question I.1.c que que quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $(f+f_n)([0,1]\subset I$ et $f([0,1])\subset I$. Soit $\epsilon>0$. Comme à la question I.1.d il existe $\eta>0$ tel que $|z-y|\leq\eta\Longrightarrow|\varphi'(z)-\varphi'(y)|\leq\epsilon$. On en déduit que, dès que n est assez grand pour que $\|f_n\|\leq\eta$, $\|\widetilde{\Phi}(f+f_n)-\Phi(f)=\varphi'\circ(f+f_n)-\varphi'\circ f\|\leq\epsilon$. C'est-à-dire que $\widetilde{\Phi}(f+f_n)\to\widetilde{\Phi}(f)$, quand $f_n\to 0_E$, ce qui est la continuité de $\widetilde{\Phi}$ en f. Comme $D\Phi=\mathrm{L}\circ\widetilde{\Phi}$ et que L est $\mathcal{C}^\infty$, on en conclut que φ est $\mathcal{C}^1$.

Montrons par récurrence sur p que "φ est $\mathcal{C}^p\Longrightarrow\Phi$ est $\mathcal{C}^p$". On vient de prouver cette proposition pour $p=1$. Supposons-la vraie pour l'entier p et montrons alors qu'elle est vraie pour $p+1$. Si φ est $\mathcal{C}^{p+1}$, φ' est $\mathcal{C}^p$ et par hypothèse de récurrence $\widetilde{\Phi}$ est alors $\mathcal{C}^p$. Mais comme $D\Phi=\mathrm{L}\circ\widetilde{\Phi}$ et que L est $\mathcal{C}^\infty$, on en déduit que $D\Phi$ est $\mathcal{C}^p$, c'est-à-dire que Φ est $\mathcal{C}^{p+1}$.

Exercice II . — II.1 – L'application $e_0: E\ni f\mapsto f(0)\in\mathbb{R}$ est linéaire et comme $|f(0)|\leq\|f\|$, cette application est continue, A_n étant la somme de cette application et de l'application constante $E\ni f\mapsto n^2\in\mathbb{R}$,

A_n est $\mathcal{C}^\infty$.

II.2 – e_0 étant continue et l'ensemble $\mathbb{N}_2$ des carrés d'entiers étant un fermé de $\mathbb{R}$, $e_0^{-1}(\mathbb{N}_2)$ et un fermé de E et donc $\Omega=E\setminus e_0^{-1}(\mathbb{N}_2)$ est bien un ouvert de E.

II.3 – $i:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $i(t)=1/t$. On a $\varphi_n=i\circ A_n$. Comme $A_n(\Omega)\subset\mathbb{R}^*$ et que A_n et i sont $\mathcal{C}^\infty$, φ_n est bien $\mathcal{C}^\infty$. On a de plus : $D\varphi_{n(f)}(h)=[Di_{(\varphi_n(f))}\circ DA_{n(f)}](h)=i'(\varphi_n(f)).DA_{n(f)}(h)=\dfrac{-h(0)}{(n^2+f(0))^2}$.

II.4 – Soit $f\in E$, on a, dès que $|f(0)|\leq n^2/2$, $|f(0)+n^2|\geq|n^2|-|f(0)|\geq n^2/2$, et donc : $|\dfrac{1}{f(0)+n^2}|\leq 2/n^2$. Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}1/n^2$ converge, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n(f)$.

II.5 – On a $|D\varphi_{n(f)}(h)|=|\dfrac{h(0)}{(n^2+f(0))^2}|\leq\dfrac{\|h\|}{|n^2+f(0)|^2}$, ce qui donne : $\|D\varphi_{n(f)}\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})}\leq\dfrac{1}{|n^2+f(0)|^2}$. Soit $f\in\Omega$ et $r>0$ tel que $B^E(f,r)\subset\Omega$. Quel que soit $g\in B^E(f,r)$, $|g(0)|\leq|f(0)|+r$. Dès que n est

tel que $n^2/2\geq|f(0)|+r$, on a : $\forall g\in B^E(f,r)$, $\|D\varphi_{n(g)}\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})}\leq|\dfrac{1}{(g(0)+n^2)^2}|\leq 4/n^4$ et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}D\varphi_n$ est normalement convergente sur $B^E(f,r)$. On en déduit que cette série est localement uniformément convergente sur Ω. Comme de plus, par la question précédente, $\sum_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n$ converge simplement sur Ω vers φ, on en conclut que φ est différentiable sur Ω et que $D\varphi=\sum_{n\in\mathbb{N}}D\varphi_n$.

II.6 – L'application $\mathrm{L}_k(a)$ est facilement k-linéaire et comme $|\mathrm{L}_k(a)(h_1,\cdots,h_k)|\leq|a|.\|h_1\|\cdots\|h_k\|$, cette application est continue. De plus $\|\mathrm{L}(a)\|_{\mathcal{L}(E\times\cdots\times E;\mathbb{R})}\leq|a|$.

II.7 – L_k est facilement linéaire et la dernière inégalité montre que L est continue (et que $\|\mathrm{L}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathcal{L}(E\times\cdots\times E;\mathbb{R}))}\leq 1$). On a déja prouvé que $D\varphi_n=\mathrm{L}_1\circ c_1\circ\varphi_n$. Montrons que $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $D^k\varphi_n=\mathrm{L}_k\circ c_k\circ\varphi_n$ par récurrence sur k. Fixons $k\in\mathbb{N}^*$ et supposons que $D^k\varphi_n=\mathrm{L}_k\circ c_k\circ\varphi_n$. On a alors : $D(D^k\varphi_n)_{(f)}(h)=D^{k+1}\varphi_{n(f)}(h)=(\mathrm{L}_k\circ Dc_{k(\varphi_n(f))}\circ D\varphi_{n(f)})(h)=\mathrm{L}_k[c_k'(\varphi_n(f)).(D\varphi_{n(f)})(h))]=\mathrm{L}_k[(-1)^k k!(k+1)\dfrac{-h(0)}{(f(0)+n^2)^k(f(0)+n^2)^2}]$. On en déduit : $D^{k+1}\varphi_{n(f)}(h_1,\cdots,h_{k+1})=D^{k+1}\varphi_{n(f)}(h_1)(h_2,\cdots,h_k)=\dfrac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(f(0)+n^2)^{k+2}}h_1(0).h_2(0)\cdots h_k(0)=[\mathrm{L}_{k+1}\circ c_{k+1}\circ\varphi_n](f)(h_1,\cdots,h_n)$.

II.8 – On a, d'après la question précédente : $\|D^k\varphi_{n(f)}\|_{\mathcal{L}(E\times\cdots\times E;\mathbb{R})}\leq\dfrac{k!}{|f(0)+n^2|^{k+1}}$. On en déduit, comme pour la question II.5, que $\sum_{n\in\mathbb{N}}D^k\varphi_n$ est localement uniformément convergente sur Ω, quel que soit $k\geq 1$, et donc que φ est $\mathcal{C}^\infty$. De plus on sait qu'alors : $D^k\varphi=\sum_{n\in\mathbb{N}}D^k\varphi_n=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{L}_{k+1}\circ c_{k+1}\circ\varphi_n$, ce qui par continuité et linéarité de L_k est $\mathrm{L}_k\circ\sum_{n\in\mathbb{N}}c_{k+1}\circ\varphi_n$ et donne bien l'égalité demandée.

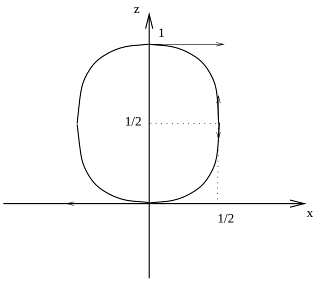
Exercice III . — III.1 – $\mathcal{H}^1$ est la sphère unité centrée de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{H}_2$ est le produit $O_x\times P$ avec P la parabole de O_{yz} d'équation $z=1-y^2$.

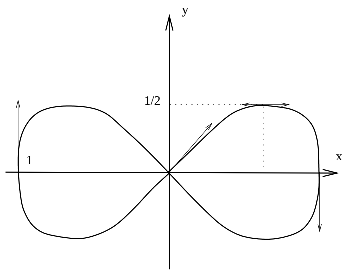
III.2 – Considérons f comme définie sur le produit $O_y \times O_{x,z}$, c'est-à-dire que la première variable de f est y et la seconde (x,z). Dans ces conditions, $D_2 f_{(y,(x,z))} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ a pour matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

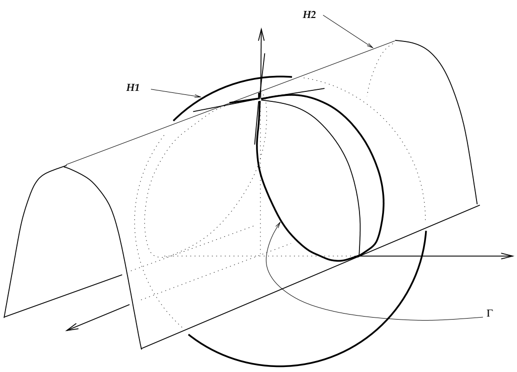
Cette matrice est inversible ssi $x \neq 0$ ssi $(x,y,z) \neq P, Q$ ou R. Comme f est $\mathcal{C}^\infty$, le théorème de la fonction implicite assure le résultat.
III.3 – $\Gamma_{x,z} = \{(x,z) \in O_{x,z}; x^2+y^2+z^2=1; y^2 = 1-z\} = \{(x,z) \in O_{x,z}; x^2+1-z+z^2=1\} = \{(x,z) \in O_{x,z}; x^2 = z-z^2\}$. L'application $z \to \sqrt{z-z^2}$ est définie sur $[0,1]$, croissante sur $[0,1/2]$, décroissante sur $[1/2,1]$, et son graphe possède des demi-tangentes verticales 0 et en 1. On en déduit, puisque $\Gamma_{x,z}$ est la réunion des graphes des deux applications $z \to \sqrt{z-z^2}$ et $z \to -\sqrt{z-z^2}$, que $\Gamma_{x,z}$ à l'allure donnée par la figure ci-dessous.

$\Gamma_{x,y} = \{(x,y) \in O_{x,y}; x^2+y^2+z^2=1; z=1-y^2\} = \{(x,y) \in O_{x,y}; x^2+y^2+(1-y^2)^2=1\} = \{(x,y) \in O_{x,y}; x^2-y^2+y^4=0\}$. L'application $y \to \sqrt{y^2-y^4}$ est définie sur $[-1,1]$ et paire, croissante sur $[0,\sqrt{1/2}]$, décroissante sur $[\sqrt{1/2},1]$, et son graphe possède des demi-tangentes de pente 1 en 0 et verticale en 1. On en déduit, puisque $\Gamma_{x,y}$ est la réunion des graphes des deux applications $y \to \sqrt{y^2-y^4}$ et $y \to -\sqrt{y^2-y^4}$, que $\Gamma_{x,y}$ à l'allure suivante :





On en conclut que Γ a l'allure suivante :



Au voisinage de Q et R, Γ n'est pas la graphe d'une application du type de φ, car Γ rebrousse en Q et R le long de O_y : si π_y est la projection de $\mathbb{R}^3$ sur O_y, $\mathcal{U}_Q$ un voisinage de Q dans $\mathbb{R}^3$, on peut trouver $b \in O_y$, $b<1$ (suffisament proche de 1), tel que $\pi_y^{-1}(\{b\}) \cap \Gamma \cap \mathcal{U}_Q$ est un ensemble constitué deux points.
III.4 – Considérons f comme définie sur le produit $O_x \times O_{y,z}$, c'est-à-dire que la première variable de f est x et la seconde (y,z). Dans ces conditions, $D_2 f_{(x,(y,z))} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ a pour matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible ssi ($y \neq 0$ et $z \neq 1/2$) ssi $(x,y,z) \neq P, A_1, A_2, A_3, A_4$ (où A_1, A_2, A_3, A_4 sont les points de Γ tels que $z = +$ ou $-1/\sqrt{2}$). En particulier cette matrice est inversible en Q et R. Comme f est $\mathcal{C}^\infty$, le théorème de la fonction implicite assure le résultat. En revanche, le croisement de Γ e P interdit, qu'au voisinage de P, Γ soit le graphe d'une application au-dessus d'un voisinaged'unedroite de coordonnées.
III.5 – Si $(a,b,c) \neq P$, la droite tangente en (a,b,c) est $(a,b,c) + \ker(Df_{(a,b,c)})$ ie :

$$a(X-a) + b(Y-b) + c(Z-c) = 0, \quad 2b(Y-b) + (Z-c) = 0.$$

Corrigés des exercices et des problèmes - Année 2003-2004

Corrigé de l'examen partiel du 19 novembre 2003

Questions de cours. — $C \Rightarrow B \Rightarrow A$, $A \not\Rightarrow B$, $A \not\Rightarrow C$, $B \not\Rightarrow C$ (sauf si f est l'application linéaire nulle).

Problème. I.1 — L'application i est linéaire. Sa continuité résulte de la majoration : $\|(0,h)\|_{\mathbb{R}\times E} \leq \|h\|_E$.

I-2. — Soit $t \in I$. L'application L est la composée $Df_{(t,x_0)} \circ i$. Elle est donc linéaire et continnue.

I-3. — $\Omega_{x_0} = i_{x_0}^{-1}(\Omega)$. L'application i_{x_0} étant continue, et Ω étant un ouvert, Ω_{x_0} est un ouvert de E. De plus $x_0 = x_0 + 0_E \in \Omega$, donc $0_E \in \Omega_{x_0}$.

I-4. — Soit $t \in I$. L'application M est la composée $M = f \circ \tau$, où τ est $\tau(h) = (t, x_0 + h)$. f étant $\mathcal{C}^1$ et τ étant $\mathcal{C}^\infty$ (de différentielle $D\tau_{(a)}(k) = (0_\mathbb{R}, k)$), on en déduit par le théorème des applications composées, que M est $\mathcal{C}^1$ et que $DM_{(\xi)}(h) = Df_{(t,x_0+\xi)}(0_\mathbb{R}, h)$.

I-5. — Soit $t \in I$. L'application $\varphi_{[t,x_0]}$ est la somme de L, de M et de la constante $f(t,x_0)$. Elle est donc de classe 1 et $D\varphi_{[t,x_0](\xi)}(k) = Df_{(t,x_0+\xi)}(0_\mathbb{R}, k) - Df_{(t,x_0)}(0_\mathbb{R}, k)$.
On a donc $(t,\xi) \mapsto D\varphi_{[t,x_0](\xi)} \equiv R \circ Df \circ \sigma - R \circ Df \circ s$, où $\sigma(t,\xi) = (t, x_0 + \xi)$ et $s(t,\xi) = (t, x_0)$. R est linéaire continue (car $(u,h) \mapsto R(u)(h)$ est bilinéaire continue), σ et s sont $\mathcal{C}^\infty$ (car leurs composantes le sont). Comme Df est par hypothèse continue sur $J \times \Omega$, $(t,\xi) \mapsto D\varphi_{[t,x_0](\xi)}$ est continue sur $I \times \Omega_{x_0}$.

I-6. — Soit $t \in I$. L'application : $(u,\xi) \mapsto \|D[\varphi_{[u,x_0]}]_{(\xi)}\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})}$ est continue en $(t, 0_E)$, car composée de l'application continue de la question précédente et de la norme $\| \ \|_{\mathcal{L}(\mathcal{E};\mathbb{R})}$, qui est elle aussi une application continue sur $\mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ (les normes sont continues, d'aprés la seconde inégalité triangulaire). Comme cette application vaut 0 en $(t, 0_\mathbb{R})$, pout tout $\epsilon > 0$, il existe $\Omega_{x_0}^t$ un voisinage ouvert de 0_E dans Ω_{x_0}, I_t un voisinage ouvert de t dans I tels que :

$$(u,\xi) \in I_t \times \Omega_{x_0}^t \Longrightarrow \|D[\varphi_{[u,x_0]}]_{(\xi)}\| \leq \epsilon.$$

I-7. — l'intervalle I est recouvert par les intervalle I_t, puisque $\forall t \in I$, $t \in I_t$. Soit alors un recouvrement fini de I par de tels intervalles $I_{t_1}, \cdots, I_{t_n}$ (par compacité de I). Clairement $\mathcal{U}_{x_0} = \bigcap_{j=1}^{n} \Omega_{x_0}^{t_j}$ est un ouvert de E contenant 0_E et répondant à la question, car quitte à choisir une boule centrée en 0_E de rayon suffisamment petit pour que cette boule soit dans $\mathcal{U}_{x_0}$, on peut supposer $\mathcal{U}_{x_0}$ convexe. (la compacité est ici essentielle, car rien n'assure que l'intersection non finie $\bigcap_{t\in I} \Omega_{x_0}^t$ fournissent un ouvert non vide !)
L'application $\varphi_{[t,x_0]}$ est différentiable sur $\mathcal{U}_{x_0}$, qui est convexe. Le théorème de la moyenne entre 0_E et h, lorsque $h \in \mathcal{U}_{x_0}$, donne : $|\varphi_{[t,x_0]}(h) - \varphi_{[t,x_0]}| = |f(t, x_0 + \vec{h}) - f(t,x_0) - Df_{(t,x_0)}(0_\mathbb{R}, \vec{h})| \leq \sup_{\xi\in[0_E,h]} \|D\varphi_{[t,x_0](\xi)}\| \cdot \|h\|$. Or par la question précédente, $\|D\varphi_{[t,x_0](\xi)}\| \leq \epsilon$, dès que $h \in \mathcal{U}_{x_0}$ (indépendamment de $t \in I$). On en déduit que : $\sup_{\xi\in[0_E,h]} \|D\varphi_{[t,x_0](\xi)}\| \leq \epsilon$, pour $h \in \mathcal{U}_{x_0}$.

I-8. — Par la question I-7, on a : $(t,\vec{h}) \in I \times \mathcal{U}_{x_0} \Longrightarrow |f(t, x_0 + \vec{h}) - f(t,x_0) - Df_{(t,x_0)}(0_\mathbb{R}, \vec{h})| \leq \epsilon.\|\vec{h}\|$.
On en déduit que, dès que $h \in \mathcal{U}_{x_0}$:

$$|\phi(x_0 + \vec{h}) - \phi(x_0) - \int_{[0,1]} Df_{(t,x_0)}(0_\mathbb{R}, \vec{h})\, dt| = |\int_{[0,1]} f(t, x_0 + \vec{h}) - f(t,x_0) - Df_{(t,x_0)}(0_\mathbb{R}, \vec{h})\, dt|$$
$$\leq \int_{[0,1]} |f(t, x_0 + \vec{h}) - f(t,x_0) - Df_{(t,x_0)}(0_\mathbb{R}, \vec{h})|\, dt \leq \int_{[0,1]} \epsilon.\|\vec{h}\|\, dt = \epsilon.\|\vec{h}\|.$$

I-9. — La question précédente montre que ϕ est différentiable en x_0, de différentielle $D\phi_{(\xi)}(h) = \int_{[0,1]} Df_{(t,x_0)}(0_\mathbb{R}, \vec{h})\, dt$ ssi $E \ni h \mapsto \int_{[0,1]} Df_{(t,x_0)}(0_\mathbb{R}, \vec{h})\, dt \in \mathbb{R}$ est linéaire et continue. La linéarité de cette application est claire, elle résulte de celle de l'intégrale et de L. D'autre part, $|\int_{[0,1]} Df_{(t,x_0)}(0_\mathbb{R}, \vec{h})\, dt| \leq \int_{[0,1]} |Df_{(t,x_0)}(0_\mathbb{R}, \vec{h})|\, dt \leq \int_{[0,1]} \|Df_{(t,x_0)}\| \cdot \|(0_\mathbb{R}, \vec{h})\|\, dt \leq \|h\| \cdot \int_{[0,1]} \|Df_{(t,x_0)}\|\, dt$. Or l'application $t \mapsto \|Df_{(t,x_0)}\|$ est bornée sur le compact I, car continue (f est $\mathcal{C}^1$). Son intégrale est alors également bornée, ce qui prouve la continuité de $E \ni h \mapsto \displaystyle\int_{[0,1]} Df_{(t,x_0)}(0_{\mathbb{R}}, \vec{h})\ dt \in \mathbb{R}$.

II-1. — Si $(*)$ a lieu, $(**)$ aussi par le théorème de Schwarz.

II-2. — L'application f est $\mathcal{C}^1$, car composée d'applications $\mathcal{C}^\infty$ et de u et v, qui sont $\mathcal{C}^1$.

II-3. — Un calcul rapide (en utilisant le théorème des applications composées) montre que :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x,y) = u(t.x,t.y) + x.t.\dfrac{\partial u}{\partial x}(t.x,t.y) + y.t.\dfrac{\partial v}{\partial x}(t.x,t.y)$ et
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,x,y) = v(t.x,t.y) + y.t.\dfrac{\partial v}{\partial y}(t.x,t.y) + x.t.\dfrac{\partial u}{\partial y}(t.x,t.y)$

II-4. — On a : $\dfrac{\partial U}{\partial t}(t,x,y) = u(t.x,t.y) + t.x.\dfrac{\partial u}{\partial x}(t.x,t.y) + t.y.\dfrac{\partial u}{\partial y}(t.x,t.y)$. Donc par $(**)$, on obtient : $\dfrac{\partial U}{\partial t}(t,x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x,y)$.
De même : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,x,y) = \dfrac{\partial V}{\partial t}(t,x,y)$.

II-5. et **II-6.** — D'après la partie I, l'application ϕ est différentiable sur Ω, puisque f est $\mathcal{C}^1$, et ses dérivées partielles sont $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = D\phi_{(x,y)}(1,0) = \displaystyle\int_{[0,1]} Df_{(t,x,y)}(0_{\mathbb{R}},(1,0))\ dt = \int_{[0,1]} \frac{\partial f}{\partial y}(t,x,y)\ dt$, de même $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\int_{[0,1]} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x,y)\ dt$. Mais par la question qui précède, on a : $\displaystyle\int_{[0,1]} \frac{\partial f}{\partial y}(t,x,y)\ dt = \int_{[0,1]} \frac{\partial V}{\partial t}(t,x,y)\ dt = V(1,x,y) - V(0,x,y) = v(x,y)$.
De la même façon, on montre que : $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = u(x,y)$.
Les dérivées partielles de ϕ sont u et v, qui sont $\mathcal{C}^1$. ϕ est donc $\mathcal{C}^2$.

Corrigé de l'examen du 2 février 2004

Questions de cours. — **1.** $A \Rightarrow B, B \not\Rightarrow A$, $A \Rightarrow C, C \not\Rightarrow A$, $C \not\Rightarrow B, B \not\Rightarrow C$.
2. $A \not\Rightarrow B, B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow C$, $A \not\Rightarrow D, D \Rightarrow A$, $C \not\Rightarrow B, B \Rightarrow C$, $D \Leftrightarrow B$, $C \not\Rightarrow D, D \Rightarrow C$.

Exercice I. — **I.1** — L'application $F : I \ni t \mapsto (f(t), g(t)) \in E^2$ est deux fois dérivable, car ses composantes le sont. Le produit scalaire $B : (\ |\ ) : E \times E \to \mathbb{R}$ est lui $\mathcal{C}^\infty$. Par le théorème des applications composées, ϕ est donc deux fois dérivable.

I-2. — On a $\phi'(t) = D\phi_{(t)}(1) = [DB_{(f(t),g(t))} \circ DF_{(t)}](1) = (f(t)|g'(t)) + (f'(t)|g(t))$. En faisant jouer a g' le rôle de g et f' celui de f dans le calcul précédent, on obtient : $\phi''(t) = (f(t)|g''(t)) + (f'(t)|g'(t)) + (f''(t)|g(t)) + (f'(t)|g'(t))$.

Exercice II. — **II.1** — Notons $L : E \to \mathbb{R}$ l'évaluation en 0. Cette application est linéaire et comme $|L(f)| = |f(0)| \leq \|f\|$, L est continue, donc $\mathcal{C}^\infty$. D'autre part $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont $\mathcal{C}^\infty$, par le théorème des applications composées, ϕ est aussi $\mathcal{C}^\infty$.

II-2. — Soient $f, h \in E$. On a $D\phi_{(f)}(h) = D\sin_{(f(0))}(DL_{(f)}(h)) = \cos(f(0)) \cdot h(0)$.

II-3. — Fixons $h \in E$. L'application $g \mapsto D\phi_{(g)}(h)$ est $g \mapsto h(0)\cdot\psi(g)$ qui a pour différentielle en f : $E \ni k \mapsto -h(0)\cdot k(0)\cdot \sin(f(0))$. Par $(*)$, on a donc : $D^2\psi_{(f)}(h,k) = -h(0) \cdot k(0) \cdot \sin(f(0))$.

Exercice III. — **III.1** — L'ensemble $\mathcal{F} = \{p\,!, p \in \mathbb{N}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car son complémentaire est réunion d'intervalles ouverts. Comme $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus g^{-1}(\mathcal{F})$, avec $g(x,y) = xy$ et que g est continue, il s'agit bien d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$. $g^{-1}(\mathcal{F})$ est la réunion des hyperboles $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = p!/x\}$.

III.2 — f_n est $\mathcal{C}^\infty$, car en tant que fraction rationnelle, elle admet des dérivées partielles à tous les ordres sur Ω. On a :

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y) = \frac{x^{n-1}(n.n! + (1-n)y)}{(n! - xy)^2}, \quad \frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y) = \frac{x^{n+1}}{(n! - xy)^2}$$

III.3 — On a :

$$\frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{A^n}{1.2\cdots(p-1)p\cdots(n-2)(n-1)n} \leq \frac{A^n}{p\cdots(n-2)(n-1)n} \leq \frac{A^n}{A^{(n-2)-p+1}(n-1)n} = \frac{A^{p+1}}{(n-1)n}$$

III.4 — Soit (a,b) un point de Ω et $r > 0$ tel que $B((a,b),r) \subset \Omega$ (un tel r existe puisque Ω est un ouvert) Quel que soit $(x,y) \in B((a,b),r)$, on a :

$$|x| \leq |a| + r = \alpha, \quad |y| \leq |b| + r = \beta, \quad |n! - xy| \geq |n! - |xy||.$$

Or comme $|xy|$ est borné par $\alpha\beta$, dès que n est assez grand, $|n! - |xy|| = n! - |xy| \geq n! - \alpha\beta$. Or comme $1/n!(n! - \alpha\beta) \to 1$ quand $n \to \infty$, pour n assez grand $n! - \alpha\beta \geq n!/2$. On en conclut que quel que soit $(x,y) \in B((a,b),r)$, on a :

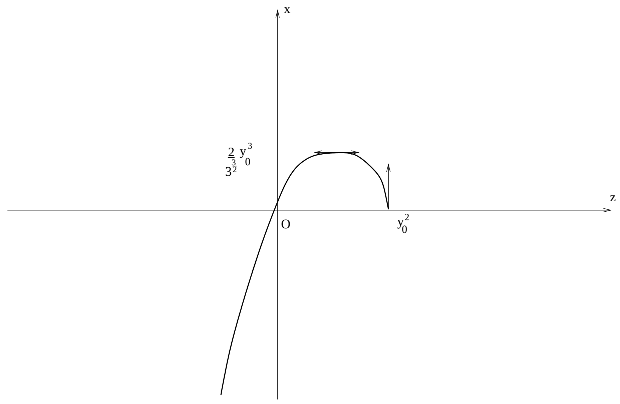
$$|\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y)| \leq \frac{4.A^{n-1}(n.n! + n\beta)}{n!^2} = \frac{4.A^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{4.A^{n-1}\beta}{(n-1)!},$$

$$|\frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)| = \frac{4.A^{n+1}}{n!^2} \leq 4.A.\frac{A^n}{n!}$$

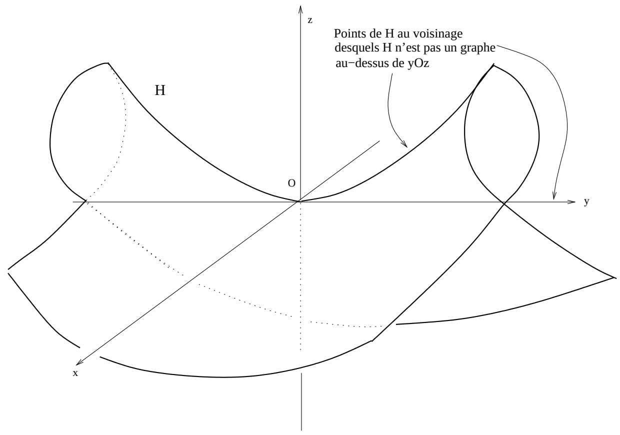
Or par la question précédente $\frac{4.A^{n-1}}{(n-1)!}$, $\frac{4.A^{n-1}\beta}{(n-1)!}$ et $4.A.\frac{A^n}{n!}$ sont les termes généraux de séries numériques convergentes. On en conclut que les séries des dérivées partielles de f_n convergent normalement sur $B((a,b),r)$ donc uniformément. Des majorations du même type montrent que la série $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est définie sur Ω. On en conclut que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est différentiable sur Ω et que $Df_{(p)}(h,k) = h.\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\partial f_n}{\partial x}(p) + k.\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\partial f_n}{\partial y}(p)$.

Exercice IV. — **IV.1** — La fonction f_0 est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, y_0^2[$, de dérivée $f'_{y_0}(z) = \dfrac{2y_0^2 - 3z}{2\sqrt{y_0^2 - z}}$. f_{y_0} est donc croissante entre $-\infty$

et $2y_0^2/3$ et décroissante entre $2y_0^2/3$ et y_0^2. De plus son graphe possède une demi-tangente verticale en y_0^2; il a l'allure suivante :



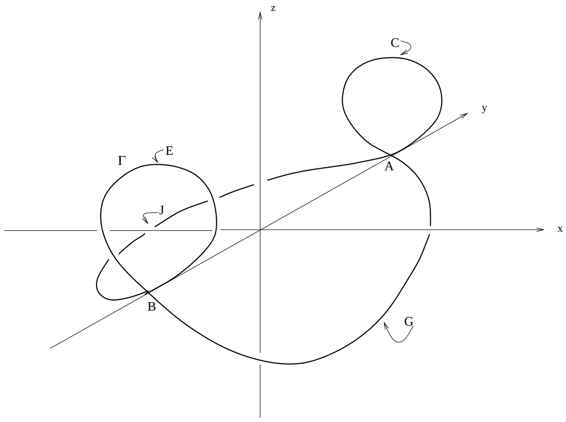
IV.2 — L'intersection $\mathcal{H} \cap \Pi_{y_0}$ est l'ensemble $\{(x, y, z), x = z\sqrt{y_0^2 - z}\} \cup \{(x, y, z), x = -z\sqrt{y_0^2 - s}\}$, il est donc donné par la réunion du graphe de f_{y_0} et de son symétrique par rapport à son axe des abcisses Oz. D'autre part l'intersection $\mathcal{H} \cap \Pi_{xy}$ est l'ensemble $\{(x, y, z), z = y^2\} \cup \{(x, y, z), z = 0\}$. On en déduit que $\mathcal{H}$ a l'allure suivante :



IV.3 — Soit $P = (a, b, c) \in \mathcal{H}$. L'application $\widetilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2((y, z), x) \mapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$. De plus $D_2\widetilde{f}_{(P)}(h) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(P).h = 2a.h$. Par conséquent $D_2\widetilde{f}_{(P)}$ est inversible ssi $a \neq 0$. Par le théorème de la fonction implicite, au voisinage d'un point P de $\mathcal{H}$ n'appartenant pas à Π_{yz}, $\mathcal{H}$ est le graphe d'une application $\mathcal{C}^\infty$ du type $(y, z) \mapsto x$. Enfin au voisinage des points P de l'axe Oy cette propriété n'a pas lieu (croisement) et au voisinage des points P de $\mathcal{H} \cap \Pi_{yz}$ cette propriété n'a pas lieu (en ces points $\mathcal{H}$ n'est pas étalé au-dessus de Π_{yz}). En dehors de ces points (au moins) $T_P\mathcal{H}$ est bien défini et l'équation de $T_P\mathcal{H}$ est : $2a(X - a) - 2bc^2(Y - b) + 3c^2(Z - c) = 0$.

IV.4 — D'après la version géométrique du théorème de la fonction implicite, si $\ker(Df_{(P)}) \oplus D = \mathbb{R}^3$, pour au moins un axe de coordonnées D, $\mathcal{H}$ est lisse en P. Or cette condition équivaut à dire que $\dim(\ker(Df_{(P)}) = 2$, puisqu'un sous-espace de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement le supplémentaire d'un (au moins) des trois axes de coordonnées. Les points P en lesquels $\mathcal{H}$ n'est pas lisse sont donc à rechercher parmi les points de $\mathcal{H}$ tels que : $\dim(\ker(Df_{(P)}) = 0$, 1 ou 3. Par le théorème du rang, $\dim(Im(Df_{(P)})) + \dim(\ker(Df_{(P)}) = 3$ et $\dim(Im(Df_{(P)}) \leq 1$, donc $\dim(\ker(Df_{(P)}) = 0$ ou 1 est impossible. La condition $\dim(\ker(Df_{(P)}) = 3$ donne $Df_{(P)} = 0$ ce qui conduit à : $P = (0, b, 0)$, avec b quelconque. Enfin le long de l'axe Oy $\mathcal{H}$ n'est pas lisse à cause du croisement. En conclusion $\mathcal{H}$ est lisse en P ssi $P \in Oy$.

IV.5 — Γ est l'intersection de $\mathcal{H}$ et de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que Γ a l'allure suivante :



IV.6 — Soit $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$,$F(x,y,z) = (g(x,y,z), f(x,y,z))$ et $\widetilde{F}(z,(x,y)) = F(x,y,z)$. $\widetilde{F}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\widetilde{F}^{-1}(\{0\}) = \Gamma$. Soit $P = (a,b,c) \in \Gamma$. Comme $D_2\widetilde{F}_{(P)}$ a pour matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(P) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(P) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(P) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2a & -2bc^2 \end{pmatrix}$$

Par le théorème de la fonction implicite, Γ est localement en P le graphe d'une application $\mathcal{C}^\infty$ du type $z \mapsto (x,y)$ lorsque $ab(1+c^2) \neq 0$.

- Pour $P \in \Gamma$, la condition $a = 0$ donne ($c = 0$ et $b^2 = 1$) ou ($c = b^2$ et $b^2 + b^4 = 1$), ce qui donne les points $P = A = (0,1,0)$, $P = B = (0,-1,0)$, $P = C = (0, \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2})$, $P = E = (0, -\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2})$.

- Pour $P \in \Gamma$, la condition $b = 0$ donne ($a^2 = -c^3$ et $-c^3 + c^2 = 1$). L'équation $-c^3 + c^2 = 1$ admet une unique solution α, car l'étude de $z \mapsto y = z^2 - z^3$ montre que le graphe de cette application ne coupe qu'une fois la droite $y = 1$. La condition ($a^2 = -c^3$ et $-c^3 + c^2 = 1$) donne alors les points $P = G = ((-\alpha)^{3/2}, 0, \alpha)$, $P = J = (-(-\alpha)^{3/2}, 0, \alpha)$.

D'autre part au voisinage de ces six points Γ ne peut pas être le graphe d'une application du type $z \mapsto (x,y)$, car en A et B se produit un croisement et en E, C, G, J, Γ n'est pas étalé au-dessus de l'axe Oz. L'équation de la droite tangente en P est : $a(X-a) + b(Y-b) + c(Z-c) = 0, 2a(X-a) - 2bc^2(Y-b) + 3c^2(Z-c) = 0$.

IV.7 — D'après la version géométrique du théorème de la fonction implicite, si $\ker(DF_{(P)}) \oplus \Pi = \mathbb{R}^3$, pour au moins un plan de coordonnées Π, Γ est lisse en P. Or cette condition équivaut à dire que $\dim(\ker(DF_{(P)}) = 1$, puisqu'un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement le supplémentaire d'un (au moins) des trois plans de coordonnées. Les points P en lesquels Γ n'est pas lisse sont donc à rechercher parmi les points de Γ tels que : $\dim(\ker(DF_{(P)}) = 0$, 2 ou 3. Par le théorème du rang, $\dim(Im(DF_{(P)})) + \dim(\ker(DF_{(P)}) = 3$ et $\dim(Im(DF_{(P)}) \leq 2$, donc $\dim(\ker(DF_{(P)}) = 0$ est impossible. Les points P en lesquels Γ n'est pas lisse sont donc à rechercher parmi les points de Γ tels que : $\dim(\ker(DF_{(P)}) = 2$ ou 3. Notons que $\dim(\ker(DF_{(P)}) = \{(X,Y,Z), aX+bY+cZ = 0, 2aX - 2bc^2Y + 3c^2Z = 0\}$

- $\dim(\ker(DF_{(P)}) = 3$ donne $DF_{(P)} = 0$ ce qui conduit à $P = (0,0,0)$, qui n'est pas un point de Γ.

- $\dim(\ker(DF_{(P)}) = 2$ se produit lorsque $P = (0,b,0)$, car alors $\{(X,Y,Z), 2aX - 2bc^2Y + 3c^2Z = 0\} = \mathbb{R}^3$. Ceci conduit à $P = A$ ou $P = B$. Si $a \neq 0$ les deux sous-espaces $\{(X,Y,Z), 2aX - 2bc^2Y + 3c^2Z = 0\}$ et $\{(X,Y,Z), aX+bY+cZ = 0\}$ sont de dimension 2 et dire que leur intersection est de dimension 2 revient à dire qu'ils sont confondus, ce qui conduit ($b = 0$ et $c = 0$) ou ($b = 0$ et $c = 2/3$) ou ($b \neq 0$ et $c^2 = -1$) qui ne donnent pas des points de Γ. En conclusion Γ ne peut être non lisse qu'en A et B, et Γ est effectivement non lisse en ces points (croisement).

Licence de Mathématiques
Université de Nice-Sophia Antipolis **Année 2003-2004**

Calcul différentiel - Corrigé de l'examen du 9 février 2004

Exercice I. — **I.1** — Comme π_V est linéaire et continue, le théorème des applications composées assure que $\bar{\gamma}$ est de même classe de différentiabilité que γ et de plus $\bar{\gamma}'(t) = \pi_V(\gamma'(t))$.

I-2. — On a $\|\widetilde{\gamma}(t)\| = 1/\|\gamma(t)\| \cdot \|\gamma(t)\| = 1$.

I-3. — On note μ la norme $\|\ \|$. On sait que μ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que $D\mu_{(a)}(h) = (a|h)/\|a\|$, pour tout $a \neq 0, h \in \mathbb{R}^n$. On note $i : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $i(x) = 1/x$ et $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application bilinéaire continue définie par $B(x,h) = x \cdot h$. On alors : $\widetilde{\gamma} = B \circ (i \circ \mu \circ \gamma, \gamma)$. Le théorème des applications composées assure que $\widetilde{\gamma}$ est de même classe de différentiabilité que γ et de plus après calculs :

$$\widetilde{\gamma}'(t) = D\widetilde{\gamma}_{(t)}(1) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|} - \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|^3}(\gamma'(t)|\gamma(t)) \qquad (*)$$

I-4. — Comme $\widetilde{\gamma}(t)$ est de norme 1 et orthogonal par définition à $s(t)$, on a :

$$(\gamma'(t)|\widetilde{\gamma}(t)) = r(t)(\widetilde{\gamma}(t)|\widetilde{\gamma}(t)) + (\widetilde{\gamma}(t)|s(t)) = r(t).$$

De sorte que l'égalité $(*)$ s'écrit :

$$\widetilde{\gamma}'(t) = \frac{1}{\|\gamma(t)\|}\Big[\gamma'(t) - (\gamma'(t)|\widetilde{\gamma}(t)\widetilde{\gamma}(t))\Big] = \frac{1}{\|\gamma(t)\|}\Big[\gamma'(t) - r(t)\widetilde{\gamma}(t)\Big] = \frac{1}{\|\gamma(t)\|}s(t)$$

.

Exercice II. — **II.1** — $\mathbb{R} \setminus \mathcal{F}$ est réunion des intervalles ouverts $]p^2, (p+1)^2[, p \in \mathbb{N}$. $\mathcal{F}$ est ainsi un fermé de $\mathbb{R}$. Comme $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus g^{-1}(\mathcal{F})$, où $g(x,y) = x\cos(y)$ et que g est continue, Ω est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

II-2. — f_n est le rapport de deux applications $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω, dont le dénominateur ne s'annule pas.

II-3. — On a : $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y\cos(x)(n^2 - x\cos(y)) + y\cos(y)\sin(x)}{(n^2 - x\cos(y))^2}$. Soit $(a,b) \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B((a,b),r) \subset \Omega$ (ce qui est possible puisque Ω est ouvert). Dès que $(x,y) \in B((a,b),r)$, on a :

$$\alpha = \min(|a+r|, |a-r|) \leq |x| \leq \max(|a+r|, |a-r|) = A,$$

et

$$\beta = \min(|b+r|, |b-r|) \leq |y| \leq \max(|b+r|, |b-r|) = B,$$

par conséquent pour tout $(x,y) \in B((a,b),r)$: $|\dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,y)| \leq \dfrac{B(n^2+A)+B}{(n^2-\alpha)^2}$, terme général d'une série numérique convergente. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\partial f_n}{\partial x}$ est normalement convergente sur $B((a,b),r)$, et donc cette seérie est localement uniformément convergente sur Ω. On montre qu'il en est de même pour $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\partial f_n}{\partial y}$. Comme quel que soit $(x,y) \in \Omega$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x,y)$ converge (même type de majoration), $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x,y)$ définit bien une application différentiable f sur Ω, dont les dérivées partielles sont :

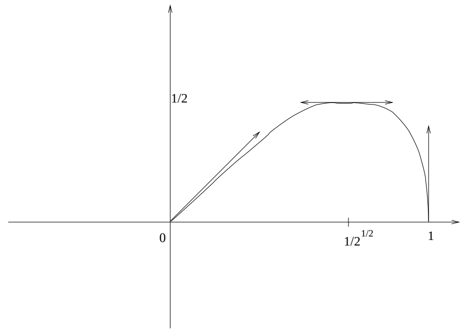
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)$$

La convergence de ces séries de fonctions continues étant uniforme, les dérivées partielles de f sont continues sur Ω, ce qui signifie que f est $\mathcal{C}^1$.

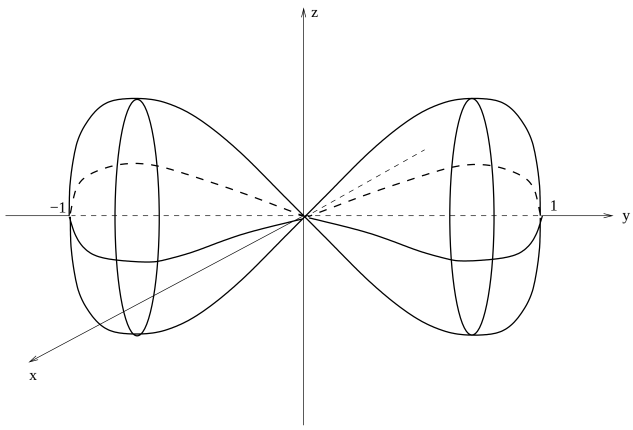
Exercice III. — **III.1** — Si $(x,y,z) \in \mathcal{H}$, $x^2 + z^2 = y^2 - y^4 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-1,1]$ et $x^2 + z^2 = y^2 - y^4 \Leftrightarrow x^2 + z^2 = (-y)^2 - (-y)^4$. En notant $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; y \geq 0\}$, on obtient $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \cup s(\mathcal{H}^+)$, où s est la symétrie de plan Π_{xz}.

III.2 — $\mathcal{H} \cap \Pi_{y_0}$ est le cercle du plan Π_{y_0} de centre $(0, y_0, 0)$ et de rayon $\sqrt{y_0^2 - y_0^4}$.

III.3 — r est continue, dérivable sur $]0,1[$. On a : $r'(y) = \dfrac{y(1-2y^2)}{\sqrt{y^2-y^2}}$, et $\lim\limits_{y \to 1} r'(y) = -\infty$, $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{r(y)-r(0)}{y-0} = 1$. D'où l'allure suivante pour le graphe de r :



On en déduit l'allure de $\mathcal{H}$:

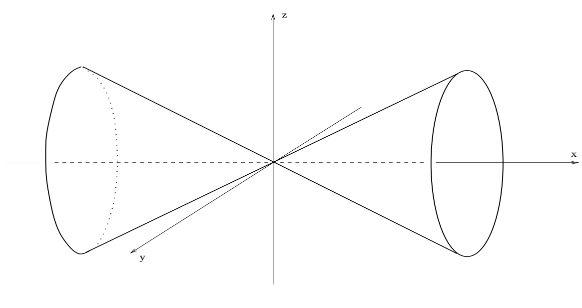


III.4 — D'après le théorème de la fonction implicite, P répond à la question lorsque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P) = 2a \neq 0$. Il s'agit donc de tous les points de $\mathcal{H}$ qui ne sont pas dans Π_{yz}. En de tels point l'équation du plan tangent à $\mathcal{H}$ est $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P)(X-a)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(P)(Y-b)+\dfrac{\partial f}{\partial z}(P)(Z-c) = 0$ ie $2a(X-a) + (4b^3 - 2b)(Y-b) + (2c)(Z-c) = 0$.

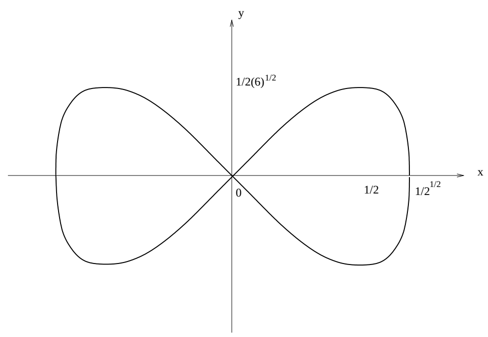
III.5 — D'après la version géomt́rique du théorème de la fonction implicite, $\mathcal{H}$ est lisse en P lorsque $\ker(Df_{(P)}) \oplus \Delta = \mathbb{R}^3$, où Δ est une des trois droites Ox, Oy, Oz, ce qui implique nécessairement que $\dim(\ker(Df_{(P)})) = 2$. Mais d'autre part un plan de dimension 2 est nécessairement supplémentaire d'au moins une des trois droites Ox, Oy, Oz.

III.6 — Les points de $\mathcal{H}$ en lesquels $\mathcal{H}$ n'est pas lisse sont donc contenus dans l'ensemble des points P tels que $\dim(\ker(Df_{(P)})) = 0, 1$ ou 3. Comme $Df_{(P)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, le théorème du rang assure que $\dim(\ker(Df_{(P)})) = 2$ ou 3. Les points de $\mathcal{H}$ en lesquels $\mathcal{H}$ n'est pas lisse sont donc contenus dans l'ensembles des points P tels que $\dim(\ker(Df_{(P)})) = 3$, ie $Df_{(P)} = 0$, ce qui donne $P = 0$. Réciproquement en 0, $\mathcal{H}$ n'est pas lisse, car quel que soit l'ouvert Ω contenant 0 inclus dans un des trois plans $\Pi_{xy}, \Pi_{xz}, \Pi_{yz}$, il existe $x \in \Omega$ tel que $\mathcal{H} \cap (x + \Delta)$ (Δ droite vectorielle orthogonale au plan en question) n'est pas un singleton.

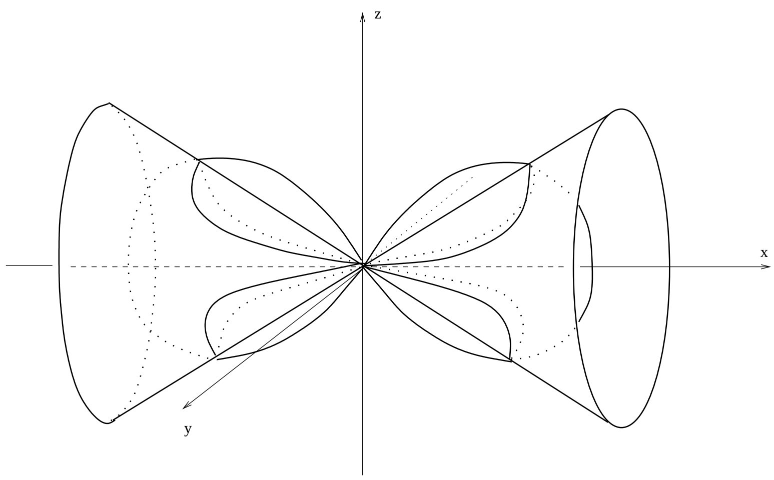
III.7 — $\mathcal{K} \cap \Pi_{z_0}$ est $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 2z_0^2\}$, il s'agit du cercle de Π_{z_0} de centre $(0,0,z_0)$ et de rayon $\sqrt{2}z_0$. D'où l'allure de $\mathcal{K}$:



III.8 — (x,y) est dans le projeté de Γ sur Π_{xy} ssi il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que : $x^2+y^2 = 2z^2$ et $x^2+z^2 = y^2-y^4$. Si (x,y) est dans le projeté de Γ sur Π_{xy}, on a la relation : $x^2 = 1/3y^2 - 2/3y^4$. L'étude de l'application $y \mapsto \sqrt{1/3y^2-2/3y^4}$ conduit à l'allure suivante pour le projeté de Γ sur Π_{xy} :



Et donc l'allure suivante pour Γ :



III.9 — D'après la version géomt́rique du théorème de la fonction implicite, $\Gamma = F^{-1}(\{0\})$ est lisse en P lorsque $\ker(DF_{(P)}) \oplus \Pi = \mathbb{R}^3$, où Π est une des trois plans de coordonnées, ce qui implique nécessairement que $\dim(\ker(DF_{(P)})) = 1$. Mais d'autre part une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement supplémentaire d'au moins une des trois plans de coordonnées.

III.10 — Les points de Γ en lesquels Γ n'est pas lisse sont donc contenus dans l'ensemble des points P tels que $\dim(\ker(DF_{(P)})) = 0, 2$ ou 3. Comme $DF_{(P)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, le théorème du rang assure que $\dim(\ker(DF_{(P)})) = 2$ ou 3. Les points de Γ en lesquels Γ n'est pas lisse sont donc contenus dans l'ensembles des points P tels que $\dim(\ker(DF_{(P)})) = 3$ ou 2.

– Dans le premier cas $DF_{(P)}) = 0$, ce qui donne $Df_{(P)} = Dg_{(P)} = 0$, soit $P = 0$

– Dans le second cas, toujours par le théorème du rang $Im(DF_{(P)})$ est de dimension 1, ie que $gradf_{(P)}$ et $gradg_{(P)}$ sont proportionnels, ce qui conduit encore à $P = 0$.

Réciproquement en 0, Γ n'est pas lisse, car quel que soit l'ouvert Ω contenant 0 inclus dans une des trois droites Ox, Oy, Oz, il existe $x \in \Omega$ tel que $\Gamma \cap (x + \Pi)$ (Π plan vectoriel orthogonal à la droite en question) n'est pas un singleton. La droite tangente à Γ en $P \neq 0$ est $P + \ker DF_{(P)} = P + (\ker Df_{(P)} \cap \ker Dg_{(P)})$, ie l'intersection des plans tangents en P à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$. L'équation de la droite tangente à Γ en $P \neq 0$ est par conséquent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a(X-a)+(4b^3-2b)(Y-b)+(2c)(Z-c) & = & 0 \\ 2a(X-a)+2b(Y-b)-4c(Z-c) & = & 0 \end{array}\right.$$