M1-SID 2018-2019

TD 2 SUR LES CHAÎNES DE MARKOV

1. Une chaîne à cinq états

Soit, pour $n \geq 0$, (X_n) une chaîne de Markov homogène sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.
(2) Déterminer la ou les composantes irréductibles de cette chaîne.
(3) Déterminer le(s) états transitoires.
(4) Donner la période de chaque élément de E.
(5) Vérifier que si X_0 suit la loi uniforme sur $\{4, 5\}$ alors X_1 a la même loi. Voyez-vous d'autres mesures de probabilité invariantes?
(6) Qu'est-ce qui change si P_{33} est changé en $1/2 - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1/2)$, et P_{34} en ε?

2. Chaîne de Markov sur $1, 2, 3$

Pour $\theta \in [0, 1/2]$, on considère la chaîne de Markov sur $E = \{1, 2, 3\}$ d'état initial $X_0 = 1$ et de matrice de transition

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\theta}{2} & \frac{1}{2}(1-\theta) \\ \theta & 1-2\theta & \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Discuter suivant la valeur de θ de la nature de la chaîne (irréductibilité, récurrence).
2) On suppose que $\theta = 0$ et $X_1 = 1$. Calculer $\mathbb{P}(X_6 = 1)$.
3) Soit k un entier naturel. On suppose que $\theta = \frac{1}{3}$. Que vaut la limite presque sûre de $n^{-1} \sum_{j=1}^{n} X_j^k$?
4) Ecrire un programme pour simuler la chaîne de Markov précédente et illustrer le point 3).

3. Liers

Une information sous la forme de oui ou non est transmise à travers n individus. On suppose que chaque intermédiaire transmet l'information avec la probabilité p et son contraire avec la probabilité $1-p$ où $0 < p < 1$. De plus, on suppose que les intermédiaires sont indépendants. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à deux états $E = \{-1, 1\}$ et déterminer sa matrice de transition P. Calculer de deux manières différentes la probabilité que le n^e individu transmette fidèlement l'information initiale et calculer sa limite lorsque n tend vers l'infini. Créer un code Python permettant d'illustrer cette convergence, où la valeur du paramètre p est affectée par l'utilisateur.

4. Espace d'états de taille 4

On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer l'unique probabilité invariante μ de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$. A partir de la loi des grands nombres, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} X_k = a \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} X_k^2 = b \qquad \text{p.s.}$$

avec a et b à déterminer. Créer un code Matlab permettant de simuler cette chaîne de Markov et de vérifier ces résultats de convergence.

5. Chaîne de Markov sur le tore

Soient $x_0, \ldots, x_{k-1}$ les racines k-ème de l'unité ($x_j = \exp \frac{2ij\pi}{k}$, $j = 0 \ldots k-1$) et $0 < p < 1$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires dont la loi est définie par:

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 \\ P(X_{n+1} = x_{j+1} | X_n = x_j) &= 1 - P(X_{n+1} = x_{j-1} | X_n = x_j) = p, \ (n > 0 \text{ et } 0 < j < k-1) \\ P(X_{n+1} = x_0 | X_n = x_{k-1}) &= 1 - P(X_{n+1} = x_{k-2} | X_n = x_{k-1}) = p, \ (n > 0) \\ P(X_{n+1} = x_1 | X_n = x_0) &= 1 - P(X_{n+1} = x_{k-1} | X_n = x_0) = p, \ (n > 0). \end{aligned}$$

(1) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov irréductible.
(2) Etudier la périodicité de la chaîne en fonction de la parité de k.
(3) Ecrire la matrice de transition P de la chaîne.
(4) Quels sont les vecteurs v de $\mathbb{R}^k$ satisfaisant $v^T P = v^T$?
(5) A partir de maintenant on se place dans le cas où la chaîne est apériodique. Que vaut $\lim_{n\to\infty} P^n$?
(6) Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i = x_j\}}$, $j = 0 \ldots k-1$ converge en probabilité quand n tend vers l'infini vers une limite indépendante de j.

6. Markov dog

Pour $0 \leq \theta \leq 1$, on considère la chaîne de Markov (X_n) à six états $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} \frac{2(1-\theta)}{3} & \frac{(1-\theta)}{6} & \frac{(1-\theta)}{6} & \theta & 0 & 0 \\ \frac{(1-\theta)}{2} & \frac{(1-\theta)}{2} & 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-\theta)}{2} & \frac{(1-\theta)}{2} & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

et d'état initial $X_0 = 1$.

(1) On suppose que $\theta = 0$.
(2) Montrer que l'on ne visite jamais les états $\{4, 5, 6\}$ mais qu'avec la condition initiale choisie les états $\{1, 2, 3\}$ sont récurrents
(3) En déduire que l'on peut restreindre l'étude en ne considérant qu'une chaîne à trois états que l'on précisera.
(4) Ecrire la matrice de transition de cette nouvelle chaîne et calculer sa probabilité invariante. Quelle est la limite presque sûre de $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} X_j$?

On suppose maintenant que $\theta \neq 0$. Soit $A = \{1, 2, 3\}$, on pose

$$N_A := \inf\{n \in \mathbb{N}^* : \ X_n \notin A\}.$$

(1) Montrer que la variable aléatoire N_A est presque sûrement finie. Déterminer sa loi.
(2) Montrer que pour $n \geq N_A$ on a $X_n \notin A$. Combien de temps, en moyenne, passe t'on sur l'ensemble A avant de le quitter définitivement?
(3) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $Y_n := X_{n+N_A}$. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov sur un espace d'états que l'on précisera. Déterminer son état initial et sa transition.
(4) Montrer qu (Y_n) est récurrente et irréductible. Calculer sa probabilité invariante.
(5) Quelle est la limite presque sûre de $\overline{Y_n} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j$? En déduire celle de $\overline{X_n}$.