M1-SID 2018-2019

TD SUR LES CHAÎNES DE MARKOV

1. Jeux de pièces

On dispose de deux pièces, une non pipée, et une qui est truquée et est *Face* des deux côtés. On commence par en choisir une des deux au hasard (de manière uniforme) et ensuite on lancecelle-là une infinité de fois.

(1) On observe *Face* au n-ième lancer. Quelle est la probabilité qu?on obtienne *Face* au $(n+1)$-ième lancer?
(2) On observe *Pile* au n-ième lancer. Quelle est la probabilité qu?on obtienne *Face* au $(n+1)$-ième lancer?
(3) On observe *Pile* au $(n-1)$-ième lancer et *Face* au n-ième lancer. Quelle est la probabilité qu?on obtienne *Face* au $(n+1)$-ième lancer?
(4) La suite des résultats des lancers obtenus forme-t-elle une chaîne de Markov?

2. Une chaîne à trois états

Soit, pour $n \geq 0$, (X_n) une chaîne de Markov sur $\{1,2,3\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.
(2) Combien y a-t-il de composantes irréductibles?
(3) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_3 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 2)$, $\mathbb{P}(X_2 = 2|X_0 = 2)$, $\mathbb{P}(X_3 = 2|X_0 = 2)$.
(4) Quelle est la loi de X_1 si X_0 a la loi uniforme sur $\{1,2,3\}$?

3. J'ai gènes

On suppose qu'un trait de caractère est gouverné par deux gènes, qui peuvent tre de deux types, G et g. On suppose que G est dominant (c'est-à-dire que c'est lui qui s'exprime si la paire est Gg) et g est donc récessif. L'état Gg est appelé hybride, l'état GG dominant, et l'état gg récessif.

(1) Un éleveur adopte la stratégie suivante : à chaque fois, il apparie l'individu de la n-ième génération avec un hybride. Modéliser la situation par une chaîne de Markov, et classer les états.

(2) Un éleveur adopte la stratégie suivante : à chaque fois, il apparie l'individu de la n-ième génération avec un dominant. Modéliser la situation par une chaîne de Markov, et classer les états.

(3) Comparer qualitativement l'évolution des deux chaînes.

4. Une chaîne à cinq états

Soit, pour $n \geq 0$, (X_n) une chaîne de Markov homogène sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.

(2) Déterminer la ou les composantes irréductibles de cette chaîne.

(3) Déterminer le(s) états transitoires.

(4) Donner la période de chaque élément de E.

(5) Vérifier que si X_0 suit la loi uniforme sur $\{4, 5\}$ alors X_1 a la même loi. Voyez-vous d'autres mesures de probabilité invariantes?

(6) Qu'est-ce qui change si P_{33} est changé en $1/2 - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1/2)$, et P_{34} en ε?