Préparation Agrégation
2012 - 2013

Exercices sur les chaînes de Markov

1. Exemples à espace d'états finis

Exercice 1. On dispose de deux pièces, une non pipée, et une qui est truquée et est "Face" des deux côtés. On commence par en choisir une des deux au hasard (de manière uniforme) et ensuite on lance celle-là une infinité de fois.

(1) On observe "Face" au n-ième lancer. Quelle est la probabilité qu'on obtienne "Face" au (n+1)-ième lancer ?

(2) On observe "Pile" au n-ième lancer. Quelle est la probabilité qu'on obtienne "Face" au (n+1)-ième lancer ?

(3) On observe "Pile" au (n-1)-ième lancer et "Face" au n-ième lancer. Quelle est la probabilité qu'on obtienne "Face" au (n+1)-ième lancer ?

(4) La suite des résultats des lancers obtenus forme-t-elle une chaîne de Markov ?

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\{1,2,3\}$ de matrice de transition
$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$
Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov. Combien y a-t-il de composantes irréductibles ?
Calculer $P(X_1 = 1|X_0 = 1)$, $P(X_2 = 1|X_0 = 1)$, $P(X_3 = 1|X_0 = 1)$, $P(X_4 = 1|X_0 = 1)$, $P(X_1 = 2|X_0 = 2)$, $P(X_2 = 2|X_0 = 2)$,$P(X_3 = 2|X_0 = 2)$.
Quelle est la loi de X_1 si X_0 suit une loi uniforme sur $\{1,2,3\}$?

Exercice 3. On suppose qu'un trait est gouverné par deux gènes, qui peuvent être de deux types, G et g. On suppose que G est dominant (c'est-à-dire que c'est lui qui s'exprime si la paire est Gg) et g récessif. L'état Gg est appelé *hybride*, l'état GG dominant, l'état gg récessif.

(1) Un éleveur adopte la stratégie suivante : à chaque fois, il apparie l'individu de la n-ième génération avec un hybride.
Modéliser la situation par une chaîne de Markov, et classer les états.

(2) Un éleveur adopte la stratégie suivante : à chaque fois, il apparie l'individu de la n-ième génération avec un dominant.
Modéliser la situation par une chaîne de Markov, et classer les états.

(3) Comparer qualitativement l'évolution des deux chaînes.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans l'ensemble $E = \{1,2,3,4,5\}$ et de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.

2. Déterminer la ou les composantes irréductibles de cette chaîne.

3. Déterminer le(s) états transitoires.

4. Donner la période de chaque élément de E.

5. Vérifier que si X_0 suit une loi uniforme sur $\{4,5\}$, X_1 également. Voyez-vous d'autres mesures de probabilité invariantes ?

6. Qu'est-ce qui change si P_{33} est changé en $\frac{1}{2} - \epsilon$ et P_{34} en ϵ ?

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\{1,2,3,4,5,6\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la ou les composantes irréductibles de cette chaîne.

2. Quels sont les états transitoires ?

3. On suppose que $X_0 = 1$. Quelle est la probabilité qu'on ne repasse jamais par 1 ? Quelle est la probabilité pour qu'on repasse pour la première fois en 1 à l'instant n ? Quelle est l'espérance du temps de premier retour en 1 ?

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\{1,2,3,4\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0. Dessiner le graphe correspondant.
1. Classer les états de la chaîne.
2. Quelle est la probabilité que la chaîne issue de 2 soit absorbée en 4 ?
3. Quel est le temps moyen d'absorption de la chaîne issue de 2 ?

Exercice 7. Un fumeur décide d'arrêter de fumer. Le premier jour suivant cette bonne résolution (jour 0), il ne fume pas. On suppose que la probabilité qu'il fume le jour $j+1$ s'il n'a pas fumé le jour j est α, et que la probabilité qu'il ne fume pas le jour $j+1$ s'il a fumé le jour j est β, avec α et β indépendants de j, et qu'on peut modéliser le problème à l'aide d'une chaîne de Markov.
a) Commenter la modélisation de ce problème par une chaîne de Markov ; donner son graphe et sa matrice de transition.
Remarque : la même chaîne (avec $\alpha = \beta$) est aussi utilisée pour modéliser la transmission de l'information par plusieurs intermédiaires, lorsqu'une erreur peut se produire à chaque étape avec probabilité α.
b) Calculer la probabilité p_n qu'il ne fume pas le jour n. Quelle est la limite π de p_n quand $n \to +\infty$? Vérifier que π est une probabilité invariante pour la chaîne, c'est-à-dire que si X_n suit la loi π, X_{n+1} aussi.
c) Trouver $A > 0$ et $0 < B < 1$ tels que pour tout x dans l'espace d'états $|P(X_n = x) - \pi(x)| \leq AB^n$.
d) Quelle est la loi du premier jour où il se remet à fumer ?
e) Quelle est la loi du premier jour (suivant le jour 0) où il ne fume pas ?
f) Calculer l'espérance du nombre de jours N_n où il fume entre le jour 1 et le jour n. Déterminer la limite $\frac{N_n}{n}$.

Exercice 8.Modèle de Wright Fisher

Pour modéliser l'évolution de configurations génétiques dans une population, on est amené à considérer la chaîne de Markov suivante. Soit P la matrice de transition suivante sur $E = \{0, 1, \ldots N\}$ définies par

$$P(i,j) = C_N^j \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j}.$$

1) Déterminer $P(0,j)$ et $P(N,j)$. La chaîne est-elle irréductible ? Quels sont les états récurrents ?
2) Décrire qualitativement le comportement asymptotique de la chaîne.
On a déjà examiné ce modèle dans le cadre du cours sur les martingales.

Exercice 9. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{1,2,3,4,5,6,\}$, de matrice de transition :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} . & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & . & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & . \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les termes diagonaux de la matrice de transition $\mathcal{P}$.

2) Déterminer les classes d'équivalences de la chaîne. En déduire que la chaîne admet une infinité de probabilités stationnaires.

3) Montrer que les états 4 et 6 sont transitoires et que l'ensemble des autres états se décompose en deux classes récurrentes que l'on précisera. Dans la suite, on notera $\mathcal{T} = \{4,6\}$, $\mathcal{C}$ la classe récurrente contenant 1 et $\mathcal{C}'$ l'autre classe récurrente. Pour tout $x, y \in E$, on définit $\rho_x = \mathbb{P}_x(T < +\infty) = \mathbb{P}(T < +\infty | X_0 = x)$ où $T = \inf\{n \geq 0; X_n \in \mathcal{C}\}$.

4) Montrer que

$$\rho_x = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathcal{C} \\ 0, & \text{si } x \in \mathcal{C}' \end{cases}$$

et que $0 < \rho_x < 1$, si $x \in \mathcal{T}$.

5) En posant $\{T < +\infty\} = \{T = 0\} \cup \{T = 1\} \cup \{2 \leq T < +\infty\}$ et en conditionnant dans le calcul $\mathbb{P}_x(2 \leq T < +\infty)$ par la valeur de X_1, établir la formule

$$\rho_x = \sum_{y\in E} p_{x,y}\rho_y \qquad \text{si } x \in \mathcal{T}$$

6) Calculer ρ_4 et ρ_6.

7) En déduire les valeurs de $\mathbb{P}_4(T_{\mathcal{C}'} < \infty)$ et de $\mathbb{P}_6(T_{\mathcal{C}'} < \infty)$, où $T_{\mathcal{C}'} = \inf\{n \geq 0; X_n \in \mathcal{C}'\}$.

8) Que vaut la fréquence limite du nombre de passages dans l'état 1 ? Calculer l'espérance du temps de retour de chaque état récurrent.

Exercice 10. Ehrenfest Soient d balles ($d > 1$) numérotées de 1 à d et réparties dans deux urnes A et B. On tire un nombre i au hasard entre 1 et d on change la balle numéro i d'urne. Soit X_n le nombre de balles dans l'urne A après n tirages indépendants. La chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est appelée chaîne d'Ehrenfest.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène. Déterminer sa matrice de transition. La chaîne d'Ehrenfest est-elle irréductible ? Récurrente ? Apériodique ?

2. On rappelle qu'une loi de probabilité λ est dite invariante (ou stationnaire) pour une chaîne de Markov si $\lambda \cdot \mathcal{P} = \lambda$.

a. Dire pourquoi on sait *a priori* que la chaîne d'Ehrenfest a une unique probabilité invariante.

b. Si X_0 est distribuée suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(d, \frac{1}{2})$, déterminer la distribution de X_1, et constater que la loi $\lambda = \mathcal{B}(d, \frac{1}{2})$ est la probabilité invariante par la chaîne d'Ehrenfest.

3. Dans cette question on suppose $d = 3$. Soit T_0 le nombre de tirages nécessaires pour vider A. Déterminer pour tout état x et pour $n = 1$, 2 ou 3, $P_x(T_0 = n)$.

4. On revient à d quelconque. Montrer qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que pour tout $x \in \mathcal{S}$:

$$\sum_{y\in\mathcal{S}} y\mathcal{P}(x,y) = ax + b.$$

En déduire $\mathrm{E}(X_n|X_0)$ et $\lim \mathrm{E}(X_n|X_0)$.

5.a. On rappelle que $\mathrm{E}_x(T_x) = \frac{1}{\lambda(x)}$.

On suppose d pair et $X_0 = \frac{d}{2}$. Quelle est l'espérance du nombre de tirages nécessaires pour revenir dans cet état ? Même question si initialement toutes les balles sont dans A. Comparer les deux résultats. Application pour $d = 10$. (Estimer C_{10}^5 par la formule de Stirling, qui donne un ordre de grandeur correct.) Et pour $d = 10^{23}$. (La chaîne d'Ehrenfest est un modèle simplifié de la théorie cinétique des gaz, visant à illustrer l'interprétation probabiliste — proposée par Boltzmann — du second principe de la thermodynamique.)

6. On modifie légèrement le modèle : lorsque la balle a été extraite d'une urne suivant la procédure décrite, on tire au sort (avec des probabilités égales) l'urne dans laquelle on la replace. Déterminer la matrice de transition et la distribution stationnaire.

2. Exercices plus théoriques

Exercice 11. Soient A, B deux ensembles finis ou dénombrables (disons deux parties de $\mathbb{N}$), et $f : A \times B \to A$ une fonction. Soient X_0 une variable aléatoire (v.a.) à valeurs dans A, et (Y_n) une suite de v.a. à valeurs dans B. On suppose que les Y_n sont indépendantes et de même loi, et que X_0 est indépendante des Y_n.

À partir de X_0 et de (Y_n), on définit une suite (X_n) de v.a. à valeurs dans A par la relation de récurrence :

$$X_{n+1} = f(X_n, Y_n).$$

Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov homogène.

Exercice 12. Application de la propriété de Markov Soit X_n une chaîne de Markov d'espace d'états E, de matrice de transition $\mathcal{P}$. Montrer les propriétés suivantes :

(1) $\mathcal{P}^n(x,y) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}^x(T_y = m)\mathbb{P}^{n-m}(y,y)$ pour tout $n \geq 1$.
(2) Si a est absorbant, $\mathbb{P}^a(X_n = a) = \mathbb{P}^x(T_a \leq n)$
(3) $\mathbb{P}^x(T_y = n+1) = \sum_{x \neq y} \mathbb{P}(x,z)\mathbb{P}^z(T_y = n)$
(4) $\mathbb{P}^x(T_y < \infty) = \mathcal{P}(x,y) + \sum_{z \neq y} \mathcal{P}(x,z)\mathbb{P}^z(T_y < \infty)$.

Exercice 13. Soit (X_n) une chaîne de Markov d'espace d'états S, de matrice de transition P. Pour deux états x et y on pose $\rho_{xy} = \mathbb{P}(T_y < +\infty | X_0 = x)$.

1) Montrer que $\rho_{xy} > 0$ si et seulement si il existe $n \geq 1$ tel que $\mathbb{P}^{(n)}(x,y) > 0$.

2) Soit n_0 le plus petit entier ≥ 1 tel que $\mathbb{P}^{(n_0)}(x,y) > 0$, et soient $x_1, \dots, x_{n_0-1}$ des états tels que

$$\mathbb{P}(x,x_1)\mathbb{P}(x_1,x_2)\dots\mathbb{P}(x_{n_0-1},y) > 0.$$

Montrer que les états $x, x_1, \dots, x_{n_0-1}, y$ sont distincts.

3) Lorsque l'espace des états est fini avec d éléments, montrer que $n_0 \leq d-1$ et que $\mathbb{P}(T_y \leq d-1 | X_0 = x) > 0$ si $\mathbb{P}^{(n_0)}(x,y) > 0$.

Exercice 14. (Potentiel d'une chaîne de Markov) Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène, à états dans un ensemble $\mathcal{S}$, et de matrice de transition $\mathcal{P}$. Pour $x, y \in \mathcal{S}$, on note :

(1) $N_y = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{X_n = y\}}$ (nombre de passages à l'état y, hors l'état initial), $\tau_y = \min\{n \geq 1,\ X_n = y\}$ (l'instant du premier passage en y après le départ) ;
(2) $U(x,y) = E_x(N_y)$ (nombre moyen de passages en y si on part de x). $U(x,y)$ est bien défini dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$: on l'appelle le *potentiel* induit par x en y. (Noter que x est récurrent *ssi* $U(x,x) = +\infty$.)
(3) $\rho_{xy} = P_x(N_y \geq 1) = P_x(\tau_y < +\infty)$ (probabilité qu'il existe un chemin de longueur ≥ 1 joignant x à y) ;

a. Montrer que $U = \sum_{n \geq 1} \mathcal{P}^n$. En déduire que pour toute fonction $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, la fonction $g = f + U \cdot f$ (définie par $g(x) = f(x) + \sum_{y \in \mathcal{S}} U(x,y)f(y)$) vérifie l'équation $g = f + \mathcal{P} \cdot g$. Montrer que c'est la plus petite solution de cette équation, i.e. que si $h : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est telle que $h = f + \mathcal{P} \cdot h$, on a $h \geq g$.

b. Soient x, y des états tels que $\rho_{xy} > 0$. Montrer que si y est un état transitoire (="transient"), on a $\rho_{yy} < 1$ et $U(x,y) = \frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}} < +\infty$ (on pourra commencer par vérifier $\mathbb{P}^x(N_y \geq k+1) = \rho_{xy}\mathbb{P}^y(N_y \geq (k))$) et que si y est récurrent, on a $\rho_{yy} = 1$ et $U(x,y) = +\infty$.

c. Soit $V = I + U$ (où I est la matrice identité). Montrer que pour tous $x, y \in \mathcal{S}$, $U(x,y) = \rho_{xy}V(y,y)$. (On convient dans cette formule que $0 \times \infty = 0$.) Quel est le maximum de la fonction $x \mapsto V(x,y)$?

d. On suppose que la chaîne a une probabilité invariante (=stationnaire) μ, i.e. $\mu \cdot \mathcal{P} = \mu$. Soit $y \in \mathcal{S}$. Montrer que si $\mu(y) > 0$, y est récurrent.

Exercice 15. Soit X_n une chaîne irréductible récurrente de matrice de transition $\mathcal{P}$ sur E. Soit $e \in E$. Soit ν une mesure invariante pour $\mathcal{P}$ telle que $\nu(e) = 1$. On pose pour $(x, y) \in E$, $Q(x, y) = P(y, x)\frac{\nu(y)}{\nu(x)}$.

(1) Montrer que Q est une matrice stochastique ; calculer Q^n et montrer que Q est récurrente irréductible. Comparer les périodes de Q et $\mathcal{P}$.
(2) Vérifier que $Q^n(x, y) = \mathbb{P}^\nu(X_{N-n} = y|X_N = x)$ pour tout $0 \leq n \leq N$: Q correspond à un renversement du temps.
(3) Montrer par récurrence que pour tout $x \neq e$,

$$\nu(x)\mathbb{Q}^x(T_e = n) = \mathbb{P}^e(X_n = x, T_e > n)$$

où $\mathbb{Q}$ désigne la loi de la chaîne associée à Q.

Exercice 16.Mesure réversible Soit X_n une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathcal{P}$. Une mesure positive finie non nulle sur E est dite réversible si pour tout (x, y) dans E, $\nu(x)\mathcal{P}(x, y) = \nu(y)\mathcal{P}(y, x)$.

(1) Montrer qu'une mesure réversible ν est invariante.
(2) Montrer que la loi binomiale $Bin(1/2, d)$ est réversible pour le modèle d'Ehrenfest.
(3) On considère la chaîne de Markov définie sur $\mathbb{N}$ par $P(k, k+1) = p$, $P(k, k-1) = 1 - p$ si $k > 0$, et $P(0, 1) = 1$.
Montrer que la mesure définie par $\nu(k) = (\frac{p}{1-p})^{k-1}$ et $\nu(0) = 1 - p$ est réversible. Pour quelles valeurs de p est-elle finie ? Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle positive ?

3. Chaînes à espace d'états dénombrable

Exercice 17. Marche aléatoire simple unidimensionnelle

Soit $X_1,\ X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p \qquad \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p = q$$

pour un certain $p \in [0, 1]$. On appelle marche aléatoire simple partant de $a \in \mathbb{Z}$, la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$S_0 = a, \qquad \forall n \geq 1,\ S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1) Montrer que l'on définit ainsi une chaîne de Markov homogène.
2) Montrer que cette chaîne est irréductible.
3) Montrer que la chaîne est récurrente si $p = 1/2$.
4) Montrer que la chaîne est transiente si $p \neq 1/2$.

Exercice 18. Marche aléatoire simple multidimensionnelle

Soit $X_1,\ X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans l'ensemble $\{\pm\vec{e_i}, i = 1 \ldots, d\}$ et de loi uniforme, où $\vec{e_i}$ est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. On appelle marche aléatoire simple partant de $a \in \mathbb{Z}$, la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$S_0 = a, \qquad \forall n \geq 1,\ S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1) Montrer que l'on définit ainsi une chaîne de Markov homogène irréductible.
2) Montrer que la chaîne est récurrente si $d = 2$. On peut montrer que la chaîne est transiente si $d \geq 3$.

Exercice 19. Nombre de particules entrant et sortant dans un volume (X_n) désigne le nombre de particules présentes à l'instant n dans un volume V. On suppose que, pendant l'intervalle de temps $[n, n+1[$, chacune des X_n particules présentes a une probabilité $p \in]0,1[$ de quitter V et que, pendant ce même temps, un nombre aléatoire de nouvelles particules, suivant une loi de Poisson de paramètre a, entre dans V. On suppose que les différents phénomènes aléatoires ainsi considérés sont indépendants les uns des autres.

a. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov homogène et calculer sa matrice de transition $\mathcal{P}(x,y)$.

b. Calculer directement $E_x(e^{itX_1})$ $(= E(e^{itX_1}|X_0 = x))$.

c. En déduire la f.c. de X_1 lorsque X_0 suit une loi de Poisson de paramètre θ.

d. Montrer que, pour une valeur convenable de θ, la loi de Poisson $P(\theta)$ est invariante par la chaîne (X_n) (i.e. $X_1, X_2, \ldots$ ont la même loi $P(\theta)$ que X_0).

e. Montrer que la chaîne (X_n) est irréductible, récurrente positive.

f. (Ergodicité) Soit $x \in \mathcal{S}$. La fréquence des passages en x entre l'instant 1 et l'instant n a-t-elle une limite quand $n \to +\infty$?

Exercice 20. Marche aléatoire sur $\{0, 1, \ldots, N\}$ avec barrières réfléchissantes.

Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'états $E = \{0, 1, \ldots, N\}$ et de matrice de transition donnée par, pour $1 \leq x \leq N-1$,

$$P(x,y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \\ q & \text{si } y = x-1 \\ 1 & \text{si } (x,y) \in \{(0,1),\ (N, N-1)\} \end{cases}$$

où $p,\ q \in]0,1[$ et $p+q = 1$. Pour tout x dans E on note T_x le temps d'entrée en x , c'est-à -dire $T_x = \inf\{n \geq 1,\ X_n = x\}$.

1) Déterminer la ou les classes de cette chaîne de Markov.
2) Justifier l'existence d'une unique probabilité invariante, ν, et la déterminer. En déduire la valeur du temps moyen $E_0(T_0)$.

Exercice 21. Marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ avec barrière quelconque.

Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'états $E = \mathbb{N}$ et de matrice de transition donnée par, pour $x \geq 1$,

$$P(x,y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \\ q & \text{si } y = x-1 \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ 1-\alpha & \text{si } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

où $p,\ q \in]0,1[$, $p+q = 1$ et $\alpha \in]0,1[$. L'état $x = 0$ est appelé barrière réfléchissante si $\alpha = 0$, barrière élastique si $\alpha \in [0,1[$, et barrière absorbante si $\alpha = 1$. Pour tout x dans E on note T_x le temps d'entrée en x , c'est-à -dire $T_x = \inf\{n \geq 1,\ X_n = x\}$.

1) Déterminer la ou les classes de cette chaîne de Markov.
2) Montrer, l'existence d'une probabilité invariante, ν, en la calculant. On discutera l'existence et l'unicité suivant les valeurs de p et de q. Lorsque $\alpha \in [0,1[$ et $p < q$ déterminer pour $x \in \mathbb{N}$, $E_x(T_x)$.
3) Si $p \geq q$, étudier la nature des états, et si $p > q$ calculer pour $x \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_x(T_0 = +\infty)$.
4) On suppose maintenant que $\alpha = 1$. Calculer $\mathbb{P}_0(T_0 < +\infty)$ et en déduire la nature de l'état $x = 0$. Calculer pour $x \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_x(T_0 = +\infty)$. En déduire la nature de ces états. Etudier la limite de la suite $(P^n(x,y))_{n\geq 0}$.

Exercice 22.File d'attente On considère une file d'attente devant une porte qui s'ouvre à tous les instants $n \in \mathbb{N}$, ne laissant entrer à chaque fois que la première personne de la file. Soit Y_n le nombre de clients arrivant pendant l'intervalle de temps $]n, n+1]$. On suppose que les Y_n sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\nu = P_{Y_0}$. Notons X_n le nombre de clients dans la file d'attente à l'instant n (au moment où la porte s'ouvre, donc y compris celui qui franchit la porte). On suppose que X_0 est indépendant des Y_n.

a. Établir une relation de récurrence entre X_n, X_{n+1} et Y_n. (On notera bien que la porte ne s'ouvre pas entre les instants n et $n+1$) En déduire que (X_n) est une chaîne de Markov homogène. Déterminer les éléments de sa matrice de transition en fonction des $\nu(\{n\})$.

b. Trouver une relation entre X_n, X_0, $\sum_{k=0}^{n-1} Y_k$, et $\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\mathbb{N}^*}(X_k)$. (On pourra la déduire de la relation de récurrence du **a**, ou l'établir indépendamment.) Interpréter.

c. En déduire que si $E(Y_0) > 1$, alors presque sûrement $X_n \to +\infty$, et que dans ce cas la chaîne est transitoire (transiente).

d. Montrer que si $E(Y_0) < 1$, l'état 0 est récurrent.

Exercice 23.Modèle de naissance et de mort
On modélise l'évolution d'une population par une chaîne X_n (éventuellement non homogène) sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition $\mathcal{P}(x, x-1) = q_x$, $\mathcal{P}(x, x) = r_x$ et $\mathcal{P}(x, x+1) = p_x$ avec $p_x + q_x + r_x = 1$, $p_x > 0$, $q_0 = 0$ et $q_x > 0$ si $x \neq 0$.
On pose $\tau_i = \inf\{n \geq 0, X_n = i\}$ ($\tau_i \neq T_i$), et si $a \leq x \leq b$, $u(x) = \mathbb{P}^x(\tau_1 < \tau_b)$.
On note $\gamma(x) = \frac{q_1 \ldots q_x}{p_1 \ldots p_x}$ et $\gamma(0) = 1$.

(1) Commenter le nom du modèle et interpréter les paramètres.

(2) Calculer $u(a)$ et $u(b)$, et montrer $u(x+1) - u(x) = \frac{q_x}{p_x}(u(x) - u(x-1))$.

(3) En déduire $u(a) - u(a+1) = \frac{\gamma(a)}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma(y)}$.

(4) On suppose $X_0 = 1$. Quelle relation y a-t-il alors entre τ_x et T_x pour $x \neq 1$? Déterminer pour tout entier n $\mathbb{P}^1(T_0 < T_n)$ et en déduire $\mathbb{P}^1(T_0 = +\infty) = \frac{1}{\sum_{y=0}^{\infty} \gamma_y}$. Que peut-on en déduire sur le caractère récurrent ou transitoire de la chaîne ? Qu'obtient-on si $p_x = q_x$ pour tout x ?

(5) Soit λ une mesure invariante pour la chaîne. Montrer qu'on a alors

$$\lambda(x) = \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_0 \cdots q_x} \lambda(0)$$

En déduire que la chaîne admet une probabilité invariante si et seulement si $\sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{p_y \gamma_y} < \infty$. Qu'obtient-on si $p_x = q_x$ pour tout x ?