UPS TOULOUSE III **Le 14/11/2018**
M1 MAPI3 2018

Partiel de Statistique

Durée 2 heures

Les notes manuscrites de cours sont autorisées

1 Loi Binomiale

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de la loi $\mathcal{B}(1, \theta_*)$, $0 < \theta_* < 1$. On pose $T = \overline{X}(1-\overline{X})$ et $S = \frac{n}{n-1}\overline{X}(1-\overline{X})$. On veut estimer $f(\theta_*) = \theta_*(1-\theta_*)$.

a) Donner un estimateur sans biais de $f(\theta_*)$.

b) Quelle est la borne de Cramér-Rao pour les estimateurs sans biais de $f(\theta_*)$?

c) On veut montrer que $\mathrm{Var}_{\theta_*}(S) = \frac{1}{n}\varphi(\theta_*) + O(n^{-2})$ et calculer $\varphi(\theta_*)$.

α) Calculer $E_{\theta_*} f(\overline{X})$ et $E_{\theta_*} f(\overline{X})^2$ en utilisant la formule de Taylor appliquée à $f(\overline{X}) - f(\theta_*)$ et $f(\overline{X})^2 - f(\theta_*)^2$.

β) Vérifier que $E_{\theta_*}(\overline{X} - \theta_*)^3$ et $E_{\theta_*}(\overline{X} - \theta_*)^4$ sont de l'ordre de $O(n^{-2})$.

γ) Conclure.

d) Calculer $\mathrm{Var}_{\theta_*}(S)$.

2 Cuatro Cuaranta

Soit n_1 et n_2 deux entiers strictement positifs fixés et $n = 2p > 2\max(n_1, n_2)$. On considère pour $j = 1 \ldots n$, des variables aléatoires ε_j i.i.d de loi normale centrée de variance σ^2 et le modèle de régression périodique :

$$Y_j = a_0 + a_1 \cos(2\pi n_1 \frac{j}{n}) + a_2 \cos(2\pi n_2 \frac{j}{n}) + b_1 \sin(2\pi n_1 \frac{j}{n}) + b_2 \sin(2\pi n_2 \frac{j}{n}) + \varepsilon_j.$$

a) Montrer ou admettre pour $i, i' = 1, 2$, les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \cos(2\pi n_i \frac{j}{n}) \cos(2\pi n_{i'} \frac{j}{n}) &= 0 \quad \text{si } i \neq i' \\ &= p \quad \text{si } i = i'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \sin(2\pi n_i \frac{j}{n}) \sin(2\pi n_{i'} \frac{j}{n}) &= 0 \quad \text{si } i \neq i' \\ &= p \quad \text{si } i = i'\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \cos(2\pi n_i \frac{j}{n}) = \sum_{j=1}^{n} \sin(2\pi n_i \frac{j}{n}) = \sum_{j=1}^{n} \cos(2\pi n_i \frac{j}{n}) \sin(2\pi n_{i'} \frac{j}{n}) = 0.$$

b) Dans ce modèle linéaire, montrer que les estimateurs des paramètres sont :

$$
\begin{aligned}
\widehat{a}_0 &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j \\
\widehat{a}_i &= \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n} Y_j \cos(2\pi n_i \frac{j}{n}),\ i=1,2 \\
\widehat{b}_i &= \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n} Y_j \sin(2\pi n_i \frac{j}{n}),\ i=1,2 \\
S^2 &= \frac{1}{2p-5}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \widehat{Y}_j\right)^2,\ \text{où} \\
\widehat{Y}_j &:= \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 \cos(2\pi n_1 \frac{j}{n}) + \widehat{a}_2 \cos(2\pi n_2 \frac{j}{n}) + \widehat{b}_1 \sin(2\pi n_1 \frac{j}{n}) + \widehat{b}_2 \sin(2\pi n_2 \frac{j}{n})
\end{aligned}
$$

c) Construire le test d'hypthèse de $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, puis celui de $a_1 = b_1 = 0$.

d) Application numérique pour le second test de la question précédente. Cas de la note LA, $n_2 = 440$ $n = 1000$. Tester si la note est un LA pur (c'est-à-dire $a_1 = b_1 = 0$) avec $S^2_{\text{obs}} = 1,5$, $\widehat{a}_1^{\text{obs}} = 0,52$, $\widehat{b}_1^{\text{obs}} = 0,98$.
On rappelle que $P(\chi^2(3) > 7.81) \approx 0.05$.