Feuille d'exercice 4

Théorème de la limite centrale

1 Coin tossing

On va jeter une pièce de monaie équilibrée.

1) Calculer la probabilité d'observer :
   — entre 912 et 1028 piles ;
   — moins de 950 piles.
2) Calculer la probabilité que la pièce ne soit pas truquée, si le nombre de piles observé est
   — 1023 ;
   — 1051 ;
   — 1070.

2 Bingauss

On considère 10000 chiffres pris au hasard par la même méthode. Calculer la probabilité que le chiffre 4 apparaisse au moins 400 fois et au plus 950 fois.

3 Dé

On considère un dé équilibré à l faces. Soit X le score observé après un lancer.

a) Quelle est la loi de X. Calculer son espérance, sa variance et sa médiane. Indications :

$$\sum_{i=1}^{l} i = \frac{l(l+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{l} i^2 = \frac{l(l+1)(2l+1)}{6}.$$

b) On suppose $l = 10$. Soit $X_1, \dots X_{100}$ les scores de 100 lancers de dé indépendants. On pose $\overline{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$, en utilisant le théorème de la limite centrale, évaluer $P(\overline{X} \leq 4)$.

4 Election

Dans la ville de Capelo il va y avoir une élection. Deux partis sont en présence :

— B.C.C : *Le parti des borgnes aux cheveux courts.*
— B.C.L : *Le parti des bègues aux cheveux longs.*

On choisit au hasard 100 électeurs sur les listes électorales de Capelo. Soit X le nombre de ces électeurs qui ont l'intention de voter pour B.C.C.

1) Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2) On suppose que lors du scrutin B.C.C. va obtenir 60% des voix, calculer alors $P(X \leq 50)$.
2) On suppose que lors du scrutin B.C.C. va obtenir 1% des voix, calculer alors $P(X \geq 3)$.

5 Pareto

Soit $\alpha > 0$. Soit X la variable aléatoire de densité

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} \text{ si } x > 1 \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

1) Pour tout réel t, calculer la probabilité de l'évènement $\{X > t\}$. En déduire la fonction de répartition de X. Calculer la médiane de X.
2) Soit $X_1 \dots X_n$ des variables aléatoires indépendantes de densité f.
   On suppose que $\alpha > 2$. Calculer l'espérance et la variance de X_1. Expliquer comment on peut approximer, pour des grandes valeurs de n, la loi de $\sum_{j=1}^{n} X_j$.

6 Joe et le taxi

L'année 1992 Joe Zilchich décide d'estimer le nombre de taxis de la ville de Durac. On suppose que la ville de Durac compte N taxis numérotés de 1 à N. Chacun de ces N taxis a la même probabilité d'être le premier de la journée à passer devant les fenêtres de Joe. De plus les lois de passage des taxis sont indépendantes d'un jour à l'autre.

a) Soit X_1 le numéro du premier taxi de la journée, observé le premier janvier 1992.
   — Quel est la loi de X_1.
   — Calculer son espérance et sa variance. On rappelle les identités :

$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

b) Soit X_n le numéro du premier taxi de la journée, observé le n-ème jour de l'année 1992.
   — Soit $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ la moyenne empirique liée à ces observations. Quelle est la loi approximative de :

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - E(X_1)}{\sqrt{\mathrm{var} X_1}}.$$

   — Expliquer comment on peut construire un intervalle de confiance pour N.

7 Last

Dans la mer du pays d'Oz, la proportion (parmi tous les poissons) de poissons volants verts pommes est 25%. Le fakir *E. Madza* a attrapé 70 poissons. Donner une approximation de la probabilité que *E. Madza* ait attrapé plus de 20 poissons volants verts pommes.