

## Feuille d'exercice 4

*Variables aléatoires continues*

### 1 Loi Uniforme

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . On considère une variable aléatoire  $X$  de loi Uniforme sur l'intervalle  $[a, b]$ , de densité de probabilité  $f$  avec

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{(a \leq x \leq b)}.$$

- 1) Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .
- 2) Déterminer sa fonction de répartition et la tracer.
- 3) On suppose que  $E(X) = V(X) = 2$ . Trouver  $a$  et  $b$ .

### 2 Unicorn bleu

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Soit  $Y = (X - 4)^2$ .

- 1) Déterminer la densité de probabilité de  $Y$ .
- 2) Calculer son espérance et sa variance.

### 3 Yosemite

Soit  $a \in \mathbb{R}$  avec  $a > 0$  et  $X$  la variable aléatoire de densité de probabilité  $f$  avec

$$f(x) = ax^4 \mathbf{1}_{(0 \leq x \leq 1)}.$$

- 1) Trouver  $a$  afin que  $X$  suive bien une loi de probabilité.
- 2) Calculer son espérance et sa variance.

### 4 Ibis rouge

Soit  $X$  la variable aléatoire de densité de probabilité  $f$  avec

$$f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2) \text{ si } |x| \leq 1$$

et 0 sinon.

- 1) Déterminer la fonction de répartition de  $X$  et la tracer.
- 2) Calculer son mode, son espérance et sa variance.
- 3) Calculer la probabilité de l'événement  $(2 | X | \leq 1)$ .

### 5 Colorado

Soit  $X$  la variable aléatoire de fonction de répartition  $F$  avec

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \text{ si } x \geq 0$$

et 0 sinon.

- 1) Déterminer la densité de probabilité de  $X$ .
- 2) Calculer son mode, son espérance et sa variance.
- 3) Calculer la probabilité de l'événement  $(1 \leq X \leq 2)$ .

### 6 Loi de Cauchy

Soit  $X$  la variable aléatoire de loi de Cauchy, de densité de probabilité  $f$  avec

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

Vérifier que  $X$  n'a pas d'espérance.

## 7 Loi de Gauss

Soit  $X$  une v.a. de loi gaussienne  $N(4, 4)$ . Déterminer la probabilité des événements

$$(X > 6), (X > 6 \text{ ou } X < -6), (2 \leq X \leq 6).$$

## 8 Mascareignes

Soit  $X$  une variable aléatoire gaussienne  $N(0, 1)$ . Soit  $Y = 2X - 1$ .

- 1) Déterminer la densité de probabilité de  $Y$ .
- 2) Calculer son espérance et sa variance.

## 9 Temps d'attente

Soit  $X$  une variable aléatoire représentant par exemple un temps d'attente exprimé en minutes. On suppose qu'elle suit une loi exponentielle dont la densité est

$$f(x) = C \exp\left(-\frac{x}{25}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x), \quad (x \in \mathbb{R}, C > 0).$$

- 1) Calculer la constante  $C$  ainsi que le temps moyen d'attente.
- 2) Calculer la probabilité des événements :
  - A : "le temps d'attente est supérieur à 5 minutes"
  - B : "le temps d'attente est compris entre 2 et 5 minutes"
  - C : "le temps d'attente est de 5 minutes"
- 3) Soit la variable aléatoire  $Y = X \mathbf{1}_{\{x \in \mathbb{R}; x < 5\}}(X)$ . Quelle est sa loi? Tracer la fonction de répartition correspondante.

## 10 Log Normale

Soit  $X$  une v.a.r. de densité définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right)^2} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x),$$

où  $m \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ . On dit que  $X$  suit une loi log-normale de paramètres  $(m, \sigma^2)$  et on note  $X \sim \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$ .

- 1) Soit  $X \sim \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$ . Calculer  $E(X)$  en utilisant l'expression de la densité d'une loi normale convenablement choisie.
- 2) On pose  $Y = cX^d$ , avec  $c$  et  $d$  réels strictement positifs. Montrer que  $Y$  est une v.a.r. suivant une loi log-normale de paramètres à déterminer.
- 3) En déduire  $\text{Var}(X)$ .

## 11 Loi Gamma

Soit  $a$  et  $\lambda$  deux réels strictement positifs.

- 1) Montrer que :

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx < \infty.$$

- 2) Montrer que  $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ . En déduire  $\Gamma(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 3) On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a e^{-\lambda x} x^{a-1}}{\Gamma(a)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité. Soit  $X$  une v.a.r. de densité  $f$  : on dit que  $X$  suit une loi gamma de paramètres  $a, \lambda$ , notée  $G(a, \lambda)$ . Calculer  $E(X)$  et  $\text{Var}(X)$ .

- 4) Soit  $Y$  une v.a.r. suivant une loi normale centrée réduite. Montrer que  $Y^2$  suit une loi  $G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  (c'est-à-dire une loi de  $\chi^2$  à 1 degré de liberté). En déduire la valeur de  $\Gamma(\frac{1}{2})$ .

## 12 Divers et variés

- 1) Soit  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Déterminer la loi de  $X^2$  par sa fonction de répartition. Calculer la densité de cette loi.
- 2) Des résistances sont fabriquées en série. La résistance d'un élément choisi au hasard dans la fabrication est une variable aléatoire  $R$  de distribution uniforme entre 9 et 11 ohms. Déterminer la densité de probabilité de la conductance  $C = 1/R$ .
- 3) Soit  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Quelle est la loi de  $\tan X$  ?
- 4) Soit  $X$  une v.a. réelle équirépartie sur  $[0, 1]$ . Elle détermine deux intervalles  $[0, X]$  et  $[X, 1]$ .
  - i) Quelle est la probabilité pour que le plus grand ait une longueur supérieure à  $\frac{3}{4}$  ?
  - ii) Déterminer les lois de  $Y = \max\{X, 1 - X\}$  et de  $Z = \min\{X, 1 - X\}$ . Montrer qu'elles admettent des densités et calculer ces densités.
- 5) Soient  $X$  une variable aléatoire réelle et  $F$  sa fonction de répartition.
  - i) Exprimer en fonction de  $F$  les fonctions de répartition de
    - $aX + b$  (où  $a$  et  $b$  désignent des constantes réelles),
    - $X^n$ ,
    - $[X]$  (partie entière de  $X$ ),
    - $X - [X]$ ,
    - $\exp(X)$ .
  - ii) On suppose que  $X$  admet une densité  $f$ . Déterminer lesquelles des v.a. ci-dessus admettent une densité et exprimer ces densités en fonction de  $f$  et  $F$ .
- 6) Soit  $X$  une variable aléatoire réelle suivant la loi de Cauchy, de densité  $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ . Déterminer la loi de la v.a.  $Y = 1/X$  (calculer sa densité si elle en admet une).
- 7) Soit  $X$  une variable de loi normale centrée réduite, c'est-à-dire de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Calculer les densité de probabilité des variables  $Y = aX + b$  et  $Z = \exp(X)$ .

- 8) La loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  de paramètre  $\lambda > 0$  est la loi de probabilité sur  $\mathbb{R}$  de densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x > 0\}}$$

- i) Calculer la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ .
- ii)  $X$  une variable aléatoire de loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$ , déterminer les fonctions de répartition et les densités des v.a.  $X^2$ ,  $\exp(X)$ ,  $\exp(-X)$  et  $1/X$ .
- iii) Soit  $T$  une variable aléatoire positive telle que  $P[T > t] > 0$  pour tout  $t \geq 0$  et

$$P[T > s + t \mid T > t] = P[T > s] \quad \text{pour tous } s, t \geq 0.$$

Interpréter cette propriété et montrer que  $T$  suit une loi exponentielle.

- 9) Soient  $X$  une variable aléatoire équirépartie sur  $]0, 1[$  et  $f$  une fonction réelle continue et strictement croissante sur cet intervalle.
  - i) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Y = f(X)$  (on notera  $a$  et  $b$  les limites, éventuellement infinies, de  $f$  en 0 et en 1).
  - ii) Comment choisir la fonction  $f$  pour que  $Y = f(X)$  soit une variable aléatoire de loi exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ .
- 10) Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de fonction de répartition  $F$  continue. Quelle est la loi de la variable aléatoire  $Y = F(X)$  ?
- 11) Soit  $X$  une v.a. réelle. Montrer qu'il existe un nombre  $m$  (appelé une *médiane* de  $X$ ) tel que :

$$P[X < m] \leq \frac{1}{2} \leq P[X \leq m].$$

Quand ce nombre est-il unique ?

- 12) Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur  $[0, 1]$ .
  - i) Calculer la probabilité de l'événement  $[Y \leq X^2]$ .
  - ii) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Z = X - Y$ .

## 13 Changements de variable

- a) Soit  $X$  une v.a. uniforme sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Quelle est la loi de  $\tan X$  ?
- b) Soit  $X$  une v.a. de densité  $f(x) = \frac{\mathbf{1}_{[0,1]}(x)}{\log 2(1+x)}$  montrer que  $\frac{1}{X} - \left[ \frac{1}{X} \right]$  a même loi que  $X$ .