Feuille d'exercice 2

Variables aléatoires discrètes

1 Dés

On jette 2 dés non pipés. Soit X la variable aléatoire représentant la somme des chiffres obtenus.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer son espérance et sa variance.
3) Déterminer le mode et la fonction de répartition de X.
4) Calculer la probabilité des évènements

$$(X \geq 6),\ (X < 4) \text{ et } (2 \leq X < 8).$$

2 Bridge

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire associant à la carte tirée sa valeur suivant la règle du jeu de bridge : 4 pour un as, 3 pour un roi, 2 pour une dame, 1 pour un valet et 0 pour toute autre carte.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer son espérance et sa variance.
3) Trouver le mode et la fonction de répartition de X.
4) Calculer la probabilité de l'évènement $(X \leq 2)$.

3 Dauphins

Une famille de dauphins est composée de 6 femelles et 4 mâles. On choisit au hasard, dans cette famille, un groupe de 4 dauphins. Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de femelles que l'on peut observer dans ce groupe. Déterminer sa loi de probabilité, son mode, son espérance et sa variance.

4 Restaurant

Un restaurant possède 50 places. La probabilité pour qu'une personne, ayant réservé, ne vienne pas, est de 20%. Un jour, le patron a pris 52 réservations. Quelle est la probabilité pour qu'il se trouve dans une situation embarassante ?

5 Garçons

Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de garçons que l'on peut observer dans une famille de 6 enfants. Déterminer sa loi de probabilité, son espérance et sa variance.

6 Loi Uniforme

Soit $a \in \mathbf{N}$ avec $a 0$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \dots, 10a\}$ telle que, pour tout entier k dans cet ensemble,

$$P(X = k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{10}.$$

1) Trouver a afin que X suive bien une loi de probabilité.
2) Calculer l'espérance et la variance de X.

7 Loi de Poisson

On considère une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre $\lambda 0$, définie, pour tout $k \in \mathbf{N}$, par

$$P(X = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}.$$

1) Calculer l'espérance et la variance de X.
2) Pour $\lambda = 10$, calculer la probabilité de l'évènement $(8 \leq X \leq 10)$.

8 Fish

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que, pour tout entier $k0$,

$$P(X = k-1) = \frac{1}{4} k P(X = k).$$

Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.

9 Loi Géométrique

On considère une variable aléatoire X de loi Géométrique de paramètre $0 < p < 1$, définie, pour tout $k \in \mathbf{N}$, par

$$P(X = k) = (1-p)p^k.$$

1) Calculer l'espérance et la variance de X.
2) Pour $p = \frac{1}{4}$, calculer la probabilité de l'évènement $(X \leq 6)$.

10 Tortues

Le nombre X d'oeufs pondus par une tortue au cours d'une ponte suit une loi de poisson de paramètre $\lambda 0$. Un oeuf a la probabilité p d'arriver à éclosion. Quelle est la loi du nombre Y de bébés tortues à chaque ponte ?

11 Lois de Poisson

Soient X et Y deux variables aléatoire indépendantes suivant respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$ et $\mathcal{P}(\beta)$, où α et β sont deux réels > 0, et soit $Z = X + Y$. Pour tout entier $n \geq 0$, déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X sachant que $Z = n$ (c'est-à-dire les probabilités conditionnelles $P(X = k \mid Z = n)$ pour $k \geq 0$).

12 Bernoulli

Soient q et r deux réels strictement compris entre 0 et 1, et soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli. On suppose que pour tout $n \geq 1$

$$P[X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0] = q, \qquad P[X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1] = r.$$

On note $p_n = P[X_n = 1]$ $(n \geq 1)$.

1) Écrire une équation de récurrence qui exprime p_{n+1} en fonction de p_n.
2) Montrer qu'il existe un $p \in [0,1]$ tel que cette équation de récurrence admette la solution constante $p_n = p$ pout tout n, et montrer que dans le cas général p_n tend vers p lorsque n tend vers l'infini.

13 Loi multinomiale

a) Soit X une v.a. de loi concentrée sur $\{1, \ldots, k\}$;

$$P(X = j) = p_j, 1 \leq j \leq k.$$

Soit $Z^j = \mathbf{1}_{(X=j)}$ et $s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{R}^k$. Calculer :

$$E\left[s_1^{Z^1} s_2^{Z^2} \cdots s_k^{Z^k}\right].$$

b) Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de la loi précédente (n variables indépendantes de même loi), et

$$N^j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(X_i=j)}.$$

Calculer :

$$E\left[s_1^{N^1} s_2^{N^2} \cdots s_k^{N^k}\right].$$

En déduire, pour $a_1, \ldots, a_k$ entiers de somme n :

$$P(N^1 = a_1, \ldots, N^k = a_k) = \frac{n!}{a_1! \ldots a_k!} p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}.$$

C'est la loi multinomiale de paramètre $(p_1, \ldots, p_k)$ et d'ordre n.