Examen : Expériences simulées : Méthodes intrusives

Lundi 14 Janvier 2019
Durée 1h15

Notes de cours manuscrites et calculatrices autorisées

Loi triangulaire

On considère une variable aléatoire Z de loi triangulaire supportée par l'intervalle $]-1,1[$ de densité

$$f_Z(z) := \begin{cases} z+1 & \text{si } z \in]-1,0], \\ 1-z & \text{si } z \in [0,1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Soit k un entier naturel, calculer $\mathbb{E}[Z^k]$.
2. Montrer que les trois premiers polynômes orthonormés associés à Z sont $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = \sqrt{6}z$ et $P_2(z) = 6\sqrt{\frac{5}{7}}(z^2 - \frac{1}{6})$
3. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + Z\cos(\pi Z), \ (t \geq 0), \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Calculer la solution exacte de l'équation (1).

   (b) Calculer $\mathbb{E}[Z\cos(\pi Z)P_1(Z)]$ et montrer que

$$\mathbb{E}[Z\cos(\pi Z)P_0(Z)] = \mathbb{E}[Z\cos(\pi Z)P_2(Z)] = 0.$$

   (c) En développant l'équation (1) sur P_0, P_1 et P_2, donner une solution approchée de cette équation.

   (d) Comparer la solution exacte à la solution approchée.