Examen final-*Image*

Mercredi 10 janvier 2017

Durée 2h

Notes de cours autorisées

1 Recuit simulé

Soit $f_1 < f_2$ deux nombres réels et l'espace d'états $\Omega := \{1, 2\}$. Pour $\omega \in \Omega$, on pose $E(\omega) = f_\omega$.

1. Pour $T > 0$, on considère la mesure de probabilité sur Ω

$$P_T(\omega) = Z^{-1}(T) \exp\left(\frac{E(\omega)}{T}\right), \quad \omega \in \Omega.$$

   Calculer la constante de normalisation $Z(T)$.

2. On fixe $T > 0$. On utilise un instrument de loi uniforme. Écrire la matrice de transition Π_T associée à la chaîne de Markov de l'algorithme de Metropolis.
3. Montrer que la suite de matrice (Π_T^n) converge vers une matrice Σ_T.
4. Quelle est la limite, quand T tend vers 0 de Σ_T ? Comment interpréter ce résultat ?

2 Prédiction gausienne

Pour n un entier naturel non nul et ρ un réel, on considère un vecteur gaussien centré de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n+1} \end{pmatrix}$, de matrice de covariance $\Gamma_{n+1} = I_n + \rho \mathbf{1_{n+1}}^T \mathbf{1_{n+1}}$. Ici I_{n+1} désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbf{1_{n+1}}$ est le vecteur colonne de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont toutes les composantes valent 1.

1. Quelles sont les valeurs propres de Γ_{n+1} ?
2. Sous quelle condition sur ρ peut-on garantir que la matrice Γ_{n+1} est symétrique définie positive ? À partir de maintenant, on suppose que cette condition est vérifiée.
3. Montrer qu'il existe un réel a tel que l'inverse de Γ_{n+1} s'écrive sous la forme $I_n + a\mathbf{1_{n+1}}^T \mathbf{1_{n+1}}$.
4. On observer $\begin{pmatrix} X_2 \\ \vdots \\ X_{n+1} \end{pmatrix}$. Quel est le prédicteur optimal de X_1 connaissant cette observation ? Quel est son risque quadratique ?