Processus de Poisson

TD9-MAPI3

2017-2018

1 Préambule

Soient $X_1, \ldots, X_n$, des variables indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1. Montrer que $N = \sum_{k\geq 1} \mathbb{I}_{\{S_k \leq \lambda\}}$ ($\lambda > 0$) où $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ ($n \in \mathbb{N}^*$), suit une loi de Poisson de paramètre λ. On en déduit l'algorithme suivant pour générer la réalisation d'une variable de loi de Poisson : Générer $x_1 \ldots x_n \ldots$ des réalisations de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre 1 indépendantes. Calculer les sommes $s_k = \sum_{j=1}^{k} x_j$ $k = 1, 2 \ldots$, le dernier k tel que $s_k \leq \lambda$ est une réalisation de loi de Poisson de paramètre λ.

2 Introduction au processus de Poisson

Soit (N_t) un processus ponctuel de Poisson d'intensité θ ($\theta > 0$). Quelle est la loi conditionnelle de N_s sachant N_t ($0 < s < t$), puis plus généralement de $N_{s_1}, N_{s_2} - N_{s_1}, \ldots, N_{s_n} - N_{s_{n-1}}$ sachant N_t ($0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < t$).

3 Paradoxe de l'autobus

Soit un processus de Poisson (N_t) de paramètre $\lambda > 0$. On appelle S_n ($n > 1$) l'instant du n-ième saut du processus et on pose $S_0 = 0$. On pose ensuite :

$$Z_t = t - S_{N_t} \quad \text{et} \quad W_t = S_{N_t+1} - t.$$

a) Calculer la loi du couple (Z_t, W_t). Montrer que Z_t et W_t sont indépendantes, et que W_t suit une loi exponentielle de paramètre λ.

b) Donner la loi de Z_t, et vérifier que Z_t a la même loi que $\min(S_1, t)$. Montrer que la fonction de répartition de Z_t tend vers la fonction de répartition de S_1 quand $t \to \infty$.

c) Calculer $E(Z_t + W_t)$. Trouver sa limite quand t tend vers $+\infty$. Que pensez-vous de ce résultat?

d) On considère les arrivées successives d'un autobus à un arrêt donné comme définissant un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Un passager potentiel arrive à l'arrêt à l'instant t. Quelle est l'espérance A de son temps d'attente?

4 Mesure de comptage

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi μ. Soit τ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de la suite (X_n). Pour un borélien de $\mathbb{R}$, B, tel que $0 < \mu(B) < 1$ on définit la variable aléatoire
$N(B) = \sum_{i=1}^{\tau} \mathbb{I}_B(X_i)$ si $\tau \geq 1$ et $N(B) = 0$ sinon.

a) Calculer la loi de probabilité de $N(B)$ et la loi du couple $(N(B), N(B^c))$.

b) Montrer que τ suit une loi de Poisson si, et seulement si, pour tout borelien B, $N(B)$ et $N(B^c)$ sont indépendantes. Déterminer la loi de $N(B)$ dans ce cas.