Feuille d'exercice 5

Synthèse et Révisions

1 Radiations

L'irradiation par les rayons X de vers à soie induit certaines anomalies. La probabilité d'une anomalie particulière est $p = 1/10$.

a) Quelle est la probabilité de trouver au moins un embryon présentant cette anomalie, sur dix disséqués ?

b) Combien faut-il en disséquer pour trouver au moins une anomalie avec une probabilité supérieure à 50% ? à 95% ?

2 Loto

Joe joue au Loto. S'il gagne (c'est-à-dire s'il trouve les 6 bons numéros sur 49), il part aux Seychelles pour un mois complet à coup sûr. S'il perd, il ne partira probablement pas (seulement avec une probabilité de $1/10000$).

a) Quelle est la probabilité pour que Joe parte aux Seychelles demain ?

b) Sachant qu'il est parti aux Seychelles, quelle est la probabilité qu'il ait gagné au Loto ?

3 Un professeur flemard

Pour déterminer la note d'un contrôle continu, un professeur procède ainsi : il lance deux dés équilibrés à 6 faces, et considère la plus petite valeur obtenue. Il définit alors la variable aléatoire N, valant 3 fois la plus petite valeur obtenue. Décrire la loi de N, puis calculer son espérance et sa variance. Le professeur est-il sympathique ?

4 Densité

Soit $a > 0$, et X la variable aléatoire continue de densité de probabilité f avec

$$f(x) = \begin{cases} ax(4-x) & \text{si } \ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Montrer que $a = 3/32$.

2) Calculer l'espérance et la variance de X.

5 Densité Bis

Soit X la variable aléatoire continue de densité de probabilité f avec

$$f(x) = \begin{cases} 2\exp(-2x) & \text{si } \ x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Calculer l'espérance et la variance de X.

2) Déterminer et tracer la fonction de répartition de X.

3) Calculer la probabilité de l'événement $(-1 \leq X \leq 1)$.

6 Coin tossing

On va jeter 2000 fois une pièce de monaie équilibrée. Calculer la probabilité d'observer :

— entre 912 et 1028 piles ;

— moins de 950 piles.

On discutera des approximations considérées.

7 Réseau influent

On considère 2 lignes A et B d'un réseau numérique se rejoignant pour former la ligne C. On suppose que :

— Le nombre X_A de messages passant sur A, durant une minute donnée, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

— Le nombre X_B de messages passant sur B, durant la même minute suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda' > 0$.

— Les variables X_A et X_B sont indépendantes.

1) Quelle est la loi du nombre X_C de messages passant, durant cette même minute, sur C ?

2) On a observé $\{X_C = n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Montrer que, la loi de X_A conditionnelle à cet événement est :

$$P(X_A = k|X_C = n) = C_n^k \frac{\lambda^k \lambda'^{n-k}}{(\lambda + \lambda')^n}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

En utilisant la fonction génératrice, calculer l'espérance et la variance de cette loi conditionnelle.

8 Des dés

On considère un dé équilibré à l faces. Soit X le score observé après un lancer.

a) Quelle est la loi de X. Calculer son espérance et sa variance. Indications :

$$\sum_{i=1}^{l} i = \frac{l(l+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{l} i^2 = \frac{l(l+1)(2l+1)}{6}.$$

b) On suppose $l = 10$. Soit $X_1, \ldots X_{100}$ les scores de 100 lancers de dé indépendants. On pose

$$\overline{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i.$$

En utilisant le théorème de la limite centrale, évaluer $P(\overline{X} \leq 5)$.

9 Comme des dés

On considère la variable aléatoire X de densité :

$$\begin{aligned} f(x) &= C(1 - \cos 2\pi x) \quad \text{si } x \in [0,1] \\ &= 0 \quad \text{si } x \notin [0,1]. \end{aligned}$$

a) Que vaut la constante C ?

b) Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

c) Que vaut l'espérance de X ? Calculer la variance de X.

d) Soit $X_1, \ldots X_{30}$ des variables i.i.d. de même loi que X. Evaluer $P(\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 15,5)$.

10 Bernoulli

Soient q et r deux réels strictement compris entre 0 et 1, et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli. On suppose que pour tout $n \geq 1$

$$P[X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0] = q, \qquad P[X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1] = r.$$

On note $p_n = P[X_n = 1]$ $(n \geq 1)$.

1) Écrire une équation de récurrence qui exprime p_{n+1} en fonction de p_n.

2) Montrer qu'il existe un $p \in [0,1]$ tel que cette équation de récurrence admette la solution constante $p_n = p$ pout tout n, et montrer que dans le cas général p_n tend vers p lorsque n tend vers l'infini.

11 Loi multinomiale

a) Soit X une v.a. de loi concentrée sur $\{1, \ldots, k\}$;

$$P(X = j) = p_j, 1 \leq j \leq k.$$

Soit $Z^j = \mathbf{1}_{(X=j)}$ et $s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{R}^k$. Calculer :

$$E\left[s_1^{Z^1} s_2^{Z^2} \cdots s_k^{Z^k}\right].$$

b) Soit $X_1, \dots, X_n$ un n-échantillon de la loi précédente (n variables indépendantes de même loi), et

$$N^j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(X_i=j)}.$$

Calculer :

$$E\left[s_1^{N^1} s_2^{N^2} \cdots s_k^{N^k}\right].$$

En déduire, pour $a_1, \dots, a_k$ entiers de somme n :

$$P(N^1 = a_1, \dots, N^k = a_k) = \frac{n!}{a_1! \dots a_k!} p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}.$$

C'est la loi multinomiale de paramètre $(p_1, \dots, p_k)$ et d'ordre n.

12 Loi de Poisson

Un auto stoppeur attend au péage de l'autoroute A6 à Avallon. Le nombre de véhicules passant par ce péage durant une heure est une variable aléatoire X. Pour chacun de ces véhicules il y a une probabilité $p \in]0, 1[$ qu'il vienne de la direction de Paris et donc $q = 1 - p$ qu'il vienne de la direction Lyon. On note Y et Z le nombre de véhicules venant de Paris (resp. Lyon), donc $Y + Z = X$.

a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer les lois de Y et Z et montrer que Y et Z sont indépendantes.

b) On suppose que Y et Z sont indépendantes. Quelle est la loi de X ?

13 Variables réelles

1) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de X^2 par sa fonction de répartition. Calculer la densité de cette loi.

2) Des résistances sont fabriquées en série. La résistance d'un élément choisi au hasard dans la fabrication est une variable aléatoire R de distribution uniforme entre 9 et 11 ohms. Déterminer la densité de probabilité de la conductance $C = 1/R$.

3) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Quelle est la loi de $\tan X$?

4) Soit X une v.a. réelle équirépartie sur $[0, 1]$. Elle détermine deux intervalles $[0, X]$ et $[X, 1]$.
   i) Quelle est la probabilité pour que le plus grand ait une longueur supérieur à $\frac{3}{4}$?
   ii) Déterminer les lois de $Y = \max\{X, 1 - X\}$ et de $Z = \min\{X, 1 - X\}$. Montrer qu'elles admettent des densités et calculer ces densités.

5) Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi de Cauchy, de densité $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$. Déterminer la loi de la v.a. $Y = 1/X$ (calculer sa densité si elle en admet une).

6) Soit X une variable de loi normale centrée réduite, c'est-à-dire de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Calculer les densité de probabilité des variables $Y = aX + b$ et $Z = \exp(X)$.

7) La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ est la loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ de densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

   i) Calculer la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
   ii) X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, déterminer les fonctions de répartition et les densités des v.a. X^2, $\exp(X)$, $\exp(-X)$ et $1/X$.
   iii) Soit T une variable aléatoire positive telle que $P[T > t] > 0$ pour tout $t \geq 0$ et

$$P[T > s + t \mid T > t] = P[T > s] \quad \text{pour tous } s, t \geq 0.$$

   Interpréter cette propriété et montrer que T suit une loi exponentielle.

8) Soient X une variable aléatoire équirépartie sur $]0, 1[$ et f une fonction réelle continue et strictement croissante sur cet intervalle.
   i) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = f(X)$ (on notera a et b les limites, éventuellement infinies, de f en 0 et en 1).
   ii) Comment choisir la fonction f pour que $Y = f(X)$ soit une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

9) Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F continue. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = F(X)$?

10) Soit X une v.a. réelle. Montrer qu'il existe un nombre m (appelé une *médiane* de X) tel que :

$$P[X < m] \leq \frac{1}{2} \leq P[X \leq m].$$

Quand ce nombre est-il unique ?

11) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[0,1]$.
 i) Calculer la probabilité de l'événement $[Y \leq X^2]$.
 ii) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X - Y$.

14 Couples de variables

a) Soit X et Y des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi du couple $(X/Y, Y)$ puis celle de Y. X/Y et Y sont-elles indépendantes ?

b) Soit Y_1 et Y_2 des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X_1 = \sqrt{-2\log Y_1}\cos 2\pi Y_2$ et $X_2 = \sqrt{-2\log Y_1}\sin 2\pi Y_2$. Montrer que X_1, X_2 sont i.i.d. et en déduire une méthode de simulation d'un couple de v.a. de loi normale indépendantes.

c) Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité de probabilité :

$$g(x,y) = \begin{cases} = \frac{1}{2}x\,y \text{ si } (x,y) \in D \\ \\ = 0 \text{ si } (x,y) \notin D \end{cases}$$

où D est le premier quart du disque centré en 0 de rayon 2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Déterminer la densité de probabilité de la variable $Z = X^2 + Y^2$, puis celle de $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

x	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$: $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$. Pour $x < 0$, utiliser $\phi(x) = 1 - \phi(-x)$.