Feuille d'exercice 4
Variables aléatoires continues

1 Loi Uniforme

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On considère une variable aléatoire X de loi Uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, de densité de probabilité f avec

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{(a \leq x \leq b)}.$$

1) Calculer l'espérance et la variance de X.
2) Déterminer sa fonction de répartition et la tracer.
3) On suppose que $E(X)=V(X)=2$. Trouver a et b.

2 Unicorne bleu

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit $Y = (X-4)^2$.
1) Déterminer la densité de probabilité de Y.
2) Calculer son espérance et sa variance.

3 Yosemite

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$ et X la variable aléatoire de densité de probabilité f avec

$$f(x) = ax^4\mathbf{1}_{(0 \leq x \leq 1)}.$$

1) Trouver a afin que X suive bien une loi de probabilité.
2) Calculer son espérance et sa variance.

4 Ibis rouge

Soit X la variable aléatoire de densité de probabilité f avec

$$f(x) = \frac{3}{4}(1-x^2) \text{ si } \mid x \mid \leq 1$$

et 0 sinon.
1) Déterminer la fonction de répartition de X et la tracer.
2) Calculer son mode, son espérance et sa variance.
3) Calculer la probabilité de l'événement $(2 \mid X \mid \leq 1)$.

5 Colorado

Soit X la variable aléatoire de fonction de répartition F avec

$$F(x) = 1 - (1 + \frac{x}{2})\exp(-\frac{x}{2}) \text{ si } x \geq 0$$

et 0 sinon.
1) Déterminer la densité de probabilité de X.
2) Calculer son mode, son espérance et sa variance.
3) Calculer la probabilité de l'événement $(1 \leq X \leq 2)$.

6 Loi de Cauchy

Soit X la variable aléatoire de loi de Cauchy, de densité de probabilité f avec

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Vérifier que X n'a pas d'espérance.

7 Loi de Gauss

Soit X une v.a. de loi gaussienne $N(4,4)$. Déterminer la probabilité des événements

$$(X > 6), (X > 6 \text{ ou } X < -6), (2 \leq X \leq 6).$$

8 Mascareignes

Soit X une variable aléatoire gaussienne $N(0,1)$. Soit $Y = 2X - 1$.
1) Déterminer la densité de probabilité de Y.
2) Calculer son espérance et sa variance.

9 Temps d'attente

Soit X une variable aléatoire représentant par exemple un temps d'attente exprimé en minutes. On suppose qu'elle suit une loi exponentielle dont la densité est

$$f(x) = C \exp(-\frac{x}{25}) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x), \quad (x \in \mathbb{R},\, C > 0).$$

1) Calculer la constante C ainsi que le temps moyen d'attente.
2) Calculer la probabilité des événements :
   A :"le temps d'attente est supérieur à 5 minutes"
   B :"le temps d'attente est compris entre 2 et 5 minutes"
   C :"le temps d'attente est de 5 minutes".
3) Soit la variable aléatoire $Y = X \mathbf{1}_{\{x \in \mathbb{R}:\, x < 5\}}(X)$. Quelle est sa loi ? Tracer la fonction de répartition correspondante.

10 Log Normale

Soit X une v.a.r. de densité définie par :

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right)^2} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x),$$

où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que X suit une loi log-normale de paramètres (m, σ^2) et on note $X \sim \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.
1) Soit $X \sim \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$. Calculer $E(X)$ en utilisant l'expression de la densité d'une loi normale convenablement choisie.
2) On pose $Y = cX^d$, avec c et d réels strictement positifs. Montrer que Y est une v.a.r. suivant une loi log-normale de paramètres à déterminer.
3) En déduire $\text{Var}(X)$.

11 Loi Gamma

Soit a et λ deux réels strictement positifs.
1) Montrer que :

$$\Gamma(a) \;=\; \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx \;<\; \infty.$$

2) Montrer que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. En déduire $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
3) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \frac{\lambda^a e^{-\lambda x} x^{a-1}}{\Gamma(a)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

   Vérifier que f est une densité de probabilité. Soit X une v.a.r. de densité f : on dit que X suit une loi gamma de paramètres a, λ, notée $G(a, \lambda)$. Calculer $E(X)$ et $\text{Var}(X)$.
4) Soit Y une v.a.r. suivant une loi normale centrée réduite. Montrer que Y^2 suit une loi $G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (c'est-à-dire une loi de χ^2 à 1 degré de liberté). En déduire la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

12 Divers et variés

1) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la loi de X^2 par sa fonction de répartition. Calculer la densité de cette loi.
2) Des résistances sont fabriquées en série. La résistance d'un élément choisi au hasard dans la fabrication est une variable aléatoire R de distribution uniforme entre 9 et 11 ohms. Déterminer la densité de probabilité de la conductance $C = 1/R$.
3) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Quelle est la loi de $\tan X$?
4) Soit X une v.a. réelle équirépartie sur $[0,1]$. Elle détermine deux intervalles $[0,X]$ et $[X,1]$.
   i) Quelle est la probabilité pour que le plus grand ait une longueur supérieur à $\frac{3}{4}$?
   ii) Déterminer les lois de $Y = \max\{X, 1-X\}$ et de $Z = \min\{X, 1-X\}$. Montrer qu'elles admettent des densités et calculer ces densités.
5) Soient X une variable aléatoire réelle et F sa fonction de répartition.
   i) Exprimer en fonction de F les fonctions de répartition de
      — $aX + b$ (où a et b désignent des constantes réelles),
      — X^n,
      — $[X]$ (partie entière de X),
      — $X - [X]$,
      — $\exp(X)$.
   ii) On suppose que X admet une densité f. Déterminer lesquelles des v.a. ci-dessus admettent une densité et exprimer ces densités en fonction de f et F.
6) Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi de Cauchy, de densité $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Déterminer la loi de la v.a. $Y = 1/X$ (calculer sa densité si elle en admet une).
7) Soit X une variable de loi normale centrée réduite, c'est-à-dire de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

   Calculer les densité de probabilité des variables $Y = aX + b$ et $Z = \exp(X)$.
8) La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ est la loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ de densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

   i) Calculer la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
   ii) X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, déterminer les fonctions de répartition et les densités des v.a. X^2, $\exp(X)$, $\exp(-X)$ et $1/X$.
   iii) Soit T une variable aléatoire positive telle que $P[T > t] > 0$ pour tout $t \geq 0$ et

$$P[T > s + t \mid T > t] = P[T > s] \quad \text{pour tous } s, t \geq 0.$$

   Interpréter cette propriété et montrer que T suit une loi exponentielle.
9) Soient X une variable aléatoire équirépartie sur $]0,1[$ et f une fonction réelle continue et strictement croissante sur cet intervalle.
   i) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = f(X)$ (on notera a et b les limites, éventuellement infinies, de f en 0 et en 1).
   ii) Comment choisir la fonction f pour que $Y = f(X)$ soit une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
10) Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F continue. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = F(X)$?
11) Soit X une v.a. réelle. Montrer qu'il existe un nombre m (appelé une *médiane* de X) tel que :

$$P[X < m] \leq \frac{1}{2} \leq P[X \leq m].$$

   Quand ce nombre est-il unique ?
12) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[0,1]$.
   i) Calculer la probabilité de l'événement $[Y \leq X^2]$.
   ii) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X - Y$.

13 Changements de variable

a) Soit X une v.a. uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Quelle est la loi de $\tan X$?
b) Soit X une v.a. de densité $f(x) = \dfrac{\mathbf{1}_{[0,1]}(x)}{\log 2(1+x)}$ montrer que $\dfrac{1}{X} - \left[\dfrac{1}{X}\right]$ a même loi que X.