Examen : Expériences simulées

Lundi 22 Janvier 2018
Durée 1h15

Notes de cours manuscrites et calculatrices autorisées

Un système simple

On considère trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3. On suppose que X_1 suit une loi normale standard (de densité $f_{X_1}(x) := \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$ $(x \in \mathbb{R})$), X_2 suit une exponentielle de moyenne 1 (de densité $f_{X_2}(x) := \exp(-x)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$) et X_3 suit une loi uniforme sur $]-1,1[$ (de densité $f_{X_3}(x) := (1/2)\mathbf{1}_{]-1,1[}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$). On considèrre la relation entrées-sortie

$$Y := 2X_1 + X_2 + 3X_3 + X_1X_2 + X_2X_3 + X_1X_3 + 2X_1X_2X_3.$$

On admettra que $\mathrm{Var}Y = 21$. On pose $X := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'on a

$$\mathbb{E}(Y|X_1) = 3X_1 + 1, \quad \mathbb{E}(Y|X_2) = X_2, \quad \mathbb{E}(Y|X_3) = 4X_3 + 1.$$

   En déduire la valeur des indices de Sobol du 1ère ordre. Quelle variable semble être prédominante au 1er ordre ?

2. Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on pose $\phi_0(x) = 1$. Déterminer $\phi_1(X_1), \phi_2(X_2)$ et $\phi_3(X_3)$ les polynômes orthogonaux de degré 1 associés à X_1, X_2, X_3.

3. Montrer que l'on peut décomposer Y sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} Y &= \phi_0(X) + 3\phi_1(X_1) + \phi_2(X_2) + \frac{4}{\sqrt{3}}\phi_3(X_3) + \phi_1(X_1)\phi_2(X_2) + \sqrt{3}\phi_1(X_1)\phi_3(X_3) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_2(X_2)\phi_3(X_3) + \frac{2}{\sqrt{3}}\phi_1(X_1)\phi_2(X_2)\phi_3(X_3). \end{aligned} \tag{1}$$

4. Déterminer la décomposition de Hoeffding-Sobol de Y comme fonction de X.

5. En utilisant (1) retrouver les indices de Sobol, du premier ordre, calculés à la première question et calculer les indices d'ordre 2 et 3.

6. Montrer que la variance de Y vaut bien 21.