Examen final-*Image*

Vendredi 6 janvier 2017

Durée 2h

Notes de cours autorisées

1 Un mélange simple

On considère une suite i.i.d. $X_1, \cdots, X_n$ dont la densité f portée par $\mathbb{R}^+$ est définie par :

$$f(x) = \frac{p^*}{\theta^*} \exp\left(-\frac{x}{\theta^*}\right) + \frac{1-p^*}{2\theta^*} \exp\left(-\frac{x}{2\theta^*}\right), \quad (x > 0).$$

Ici $p^* \in]0,1[$ et $\theta^* > 0$ sont des paramètres inconnus que l'on souhaite estimer.

1. Calculer les deux premiers moments de X_1.
2. On suppose que $p^* = 1/2$. Soit $\widehat{\theta}$ l'estimateur des moments de θ^*. Calculer $\widehat{\theta}$. Montrer que cet estimateur converge et est asymptotiquement gaussien. Déterminer la variance asymptotique.
3. On suppose que $\theta^* = 1$. Soit $\widehat{p}$ l'estimateur des moments de p^*. Calculer $\widehat{p}$. Montrer que cet estimateur converge et est asymptotiquement gaussien. Déterminer la variance asymptotique.
4. On suppose maintenant que p^* et θ^* sont tous les deux inconnus. Soit $\widehat{\widehat{\theta}}$ et $\widehat{\widehat{p}}$ les estimateurs des moments de ces paramètres. Calculer $\widehat{\widehat{\theta}}$ et $\widehat{\widehat{p}}$. Montrer que ces estimateurs convergent.

2 Filtro de Kalman

Pour $\omega > 0$, on considère l'équation différentielle modélisant les oscillations d'un ressort :

$$x''(t) = -\omega x(t),\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1, (t \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

On pose $y(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$.

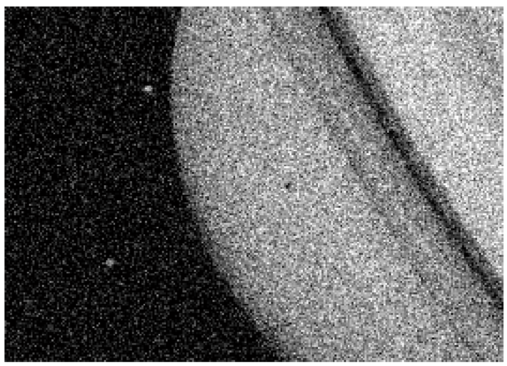
1. Montrer que l'on peut réécrire l'équation (1) sous la forme d'un système d'équations différentielles
$$y'(t) = Ay(t),\ y(0) = y_0. \tag{2}$$
2. Expliciter les quantités A et y_0. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, la matrice $\exp(tA)$.
3. Soit $h > 0$ un pas de discrétisation. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le système dynamique discret
$$\begin{cases} z_n = y(nh) + \sigma\varepsilon_n \\ w_n = x(nh) + \delta\eta_n \end{cases} \tag{3}$$

Ici (ε_n) est une suite i.i.d. de vecteurs gaussiens standard de $\mathbb{R}^2$ indépendante de la suite i.i.d. de gaussiennes standard (η_n). σ et δ sont des réels strictement positifs. Réécrire le système (3) sous une forme récursive.

4. On suppose que l'on observe uniquement la suite (w_n). Construire le filtre de Kalman permettant la prédiction de la seconde composante de z_n.

3 Segmentation d'une image bruitée

On souhaite segmenter les satellites de saturne dans l'image ci-dessous :



L'image étant particulièrement bruitée, il est soit nécessaire d'utiliser une méthode de segmentation avancée, soit de la débruiter puis d'utiliser une méthode de segmentation élémentaire. Nous partirons sur cette deuxième option.

1. Citer au moins deux méthodes de débruitage simples et indiquer pourquoi elles donneront de mauvais résultats sur cette image.
2. On peut prouver mathématiquement que la convolution d'une image $I(x), x \in \Omega$ avec la fonction gaussienne d'écart type $\sqrt{2kT}$ est équivalente à diffuser les intensités de I durant un temps T et un coefficient de diffusion k :

$$\begin{cases} \frac{\partial I_t(x)}{\partial t} = k\Delta I_t(x) \qquad x \in \Omega \text{ et } t \in [0,T] \\ I_0(x) = I(x)\,, \end{cases} \tag{4}$$

   Comment adapteriez-vous cette équation pour lisser les intensités de l'image partout dans Ω sauf au bord des formes principales de l'image (*i.e.* là où la norme du gradient des intensités est élevé) ?
3. Une fois l'image débruitée, quelle procédure suivriez vous pour segmenter les satellites ?