Méthode de Monte Carlo par chaînes de Markov - II

TD5-MAPI3

2016-2017

1 Gradient stochastique

1) Montrer que si $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement convexe et tend vers l'infini, alors la solution θ de l'équation différentielle $\theta' = -\nabla V(\theta)$ converge vers le minimum θ^* de V.

2) Rappeler la méthode du gradient, version discrétisée du flot de gradient, qui permet de minimiser une fonction V par un algorithme déterministe.

Supposons maintenant que nous n'avons pas accès directement au gradient mais à $\nabla V(\theta) + \xi_n$, où ξ_n sont des variables aléatoires de moyennes nulles et de valeurs absolues bornées $|\xi_n| \leq K$. On utilise alors l'algorithme de gradient stochastique suivant pour approcher le minimum θ^* de V :

$$\widehat{\theta}_{n+1} = \widehat{\theta}_n - \gamma_n(\nabla V(\widehat{\theta}_n) + \xi_{n+1}),$$

où $\widehat{\theta}_0$ est arbitraire et (γ_n) est une suite décroissante positive non sommable et de carré sommable.

3) Montrer que si $\nabla V \leq C$ et $V(\theta) - V(\theta^*) \geq c(\theta - \theta^*)^2$ (pour deux constantes $c, C \geq 0$), alors

$$\mathbb{E}[(\widehat{\theta}_{n+1} - \theta^*)^2 | \widehat{\theta}_n] \leq (1 - 2\gamma_n c)(\widehat{\theta}_n - \theta^*)^2 + \gamma_n (C + K)^2.$$

4) Montrer que $\prod_{k=0}^{n}(1 - 2\gamma_k c)$ converge vers 0.

5) Montrer par récurrence que, pour tout $k_0 \leq n$, on a

$$\mathbb{E}[(\widehat{\theta}_n - \theta^*)^2] \leq \left(\prod_{k=k_0}^{n}(1 - 2\gamma_k c)\right) \cdot \mathbb{E}[(\widehat{\theta}_{k_0} - \theta^*)^2] + \left(\sum_{k=k_0}^{n} \gamma_k^2\right) \cdot (C + K)^2.$$

6) En déduire la convergence en moyenne quadratique de l'algorithme : $\mathbb{E}[(\widehat{\theta}_n - \theta^*)^2]$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

2 Estimation récursive d'un quantile

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition F régulière et de densité $F' > 0$. Pour $\alpha \in]0, 1[$, on note θ^α le quantile d'ordre α de la loi F : $F(\theta^\alpha) = 1 - \alpha$. Afin d'estimer récursivement θ^α on utilise l'algorithme stochastique récursif :

$$\widehat{\theta}_{n+1} = \widehat{\theta}_n - \gamma_n(\mathbb{1}_{\{X_{n+1} \leq \widehat{\theta}_n\}} - 1 + \alpha),$$

où $\widehat{\theta}_0$ est arbitraire et (γ_n) est une suite décroissante positive non sommable et de carré sommable.

1) Calculer le champ moyen de l'algorithme $\mathbb{E}[(\widehat{\theta}_{n+1} - \widehat{\theta}_n) | \widehat{\theta}_n]$.

2) Montrer que l'algorithme est un algorithme de gradient stochastique pour une fonction strictement convexe de minimum θ^α.

3) On se place dans le cas où F est la loi normale standard. Etudier empiriquement la convergence et la loi de fluctuation de la suite $(\widehat{\theta}_n)$ dans le cas des trois quartiles.

4) Reprendre la question précédente en remplaçant la loi normale par une loi exponentielle puis par la loi de Cauchy.

3 Bandit à deux bras

Une machine à sous a deux leviers. La probabilité de gagner avec le levier A (respectivement B) est inconnue et vaut p_A (resp. p_B). Un joueur va chercher à optimiser son gain moyen, par un choix judicieux des leviers.

Voilà sa première stratégie : à l'instant $n+1$, il choisit le levier A si le taux de réussite du levier A (calculé sur les fois précédentes où le joueur a choisi le levier A) est supérieur ou égal au taux de réussite du levier B (calculé sur les fois précédentes où le joueur a choisi le levier B). Dans le cas contraire, il choisit le levier B.

1) Simuler cette stratégie.

2) On suppose que $p_A > p_B$. Expliquer pourquoi la situation suivante représente un piège susceptible d'arriver avec une probabilité non nulle : le joueur perd d'abord avec le levier A puis gagne avec le levier B.

Voilà sa seconde stratégie : à l'instant $n+1$, il choisit la machine A (resp. B) avec probabilité θ_n (resp. $1-\theta_n$) et

$$\theta_{n+1} = \begin{cases} \theta_n & \text{s'il a perdu} \\ \theta_n + \gamma_n(1-\theta_n) & \text{s'il a gagné avec } A \\ \theta_n - \gamma_n \theta_n & \text{s'il a gagné avec } B. \end{cases}$$

θ_0 est arbitraire et (γ_n) est une suite décroissante positive non sommable et de carré sommable. Il est possible de montrer que θ_n converge vers 1 (resp. 0) si A (resp. B) est la meilleure machine.

3) Calculer le champ moyen $\mathbb{E}[(\theta_{n+1}-\theta_n)|\theta_n]$.

4) Montrer que si $p_A > p_B$ (resp. $p_A < p_B$) alors $\mathbb{E}[\theta_n]$ est croissant (resp. décroissant).

5) Illustrer cette stratégie par des simulations. En particulier, mettre en évidence la convergence du taux de réussite global vers $\max(p_A, p_B)$, et vérifier si il y a un théorème limite central.

4 Modèle autorégressif à indices aléatoires

On considère ici le modèle autorégressif à indices aléatoires suivant :

$$X_{n+1} = A_{\varepsilon_n} X_n + B_{\varepsilon_n}.$$

- La suite observée est $X = (X_n)_{n\geq 0}$ (on choisit X_0 arbitrairement).
- Le bruit $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{1, 2\}$.

1) Simuler ce modèle et représenter graphiquement les trajectoires obtenues. On pourra essayer plusieurs valeurs pour les matrices A_1, A_2 et les vecteurs B_1, B_2. Par exemple, la trajectoire du Dragon de Heighways, donnée par

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) Etudier empiriquement la loi des grands nombres et le théorème de la limite centrale pour les suites (A_{ε_n}) et (B_{ε_n}).