Chaînes de Markov

TD3-MAPI3

2016-2017

1 Généralités

Définition 1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. à valeurs dans un espace E fini ou dénombrable. On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov si $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x_0, x_1, \cdots, x_{n+1} \in E$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

E s'appelle l'espace des états de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$.

Définition 2. On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène si $\forall x, y \in E$, la probabilité de transition de l'état x à l'état y est indépendante de n c.a.d. pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = P(x, y).$$

Pour caractériser la loi d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\geq 0}$, il suffit de connaitre la loi ν de X_0, appelée loi initiale de la chaîne, ainsi que la matrice de transition P donnée par

$$P = (P(x, y))_{x,y\in E}.$$

P est une matrice stochastique c.a.d. $\forall x, y \in E$, $P(x, y) \geq 0$ et la somme de chacune des lignes de P est égale à 1. Pour tout $n \geq 1$ et $\forall x_0, x_1, \cdots, x_n \in E$, on a

$$P(X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) = \nu(x_0) P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n).$$

Exercice 1. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ avec $0 < p < 1$ et, pour tout $n \geq 0$, soit $X_n = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène dont on précisera la matrice de transition P. Créer un code Matlab permettant de simuler cette chaîne de Markov, où la valeur du paramètre p est affectée par l'utilisateur.

Théorème 1. Théorème de Perron-Frobenius. Toute chaîne de Markov homogène à valeurs dans un espace d'états fini E possède au moins une mesure invariante μ c.a.d. une mesure positive sur E telle que $\mu P = \mu$.

2 Convergence.

Définition 3. On dit qu'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est ergodique s'il existe une probabilité μ telle que, pour toute loi initiale ν, la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers μ.

Théorème 2. Loi des Grands Nombres. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov ergodique et soit μ l'unique mesure invariante de la chaîne. Alors, pour toute fonction f intégrable pour μ et pour toute loi initiale ν, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) = \int_E f(x)\, d\mu(x) \qquad \text{p.s.}$$

Exercice 2. Une information sous la forme de oui ou non est transmise à travers n individus. On suppose que chaque intermédiaire transmet l'information avec la probabilité p et son contraire avec la probabilité $1 - p$ où $0 < p < 1$. De plus, on suppose que les intermédiaires sont indépendants. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à deux états $E = \{-1, 1\}$ et déterminer sa matrice de transition P. Calculer de deux manières différentes la probabilité que le n^e individu transmette fidèlement l'information initiale et calculer sa limite lorsque n tend vers l'infini. Créer un code Matlab permettant d'illustrer cette convergence, où la valeur du paramètre p est affectée par l'utilisateur.

Exercice 3. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états $E = \{0, 1\}$ et de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

avec $0 < a, b < 1$. Montrer que

$$P^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

puis déterminer la limite de P^n lorsque n tend vers l'infini. Calculer l'unique probabilité invariante μ de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$. Si $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, montrer la convergence en probabilité sous μ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{a}{a+b}.$$

Créer un code Matlab permettant de simuler cette chaîne de Markov et d'illustrer ce résultat de convergence, où les paramètres a et b sont affectés par l'utilisateur.

Exercice 4. Soit d boules numérotées de 1 à d avec $d > 1$, réparties dans deux urnes A et B. On tire un nombre i au hasard entre 1 et d et la boule numéro i est changée d'urne. On note X_n le nombre de boules dans l'urne A après n tirages indépendants. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène d'espace d'états fini $E = \{0, 1, \cdots, d\}$, appelée chaîne d'Ehrenfest. Déterminer sa matrice de transition P ainsi que son unique probabilité invariante μ. Montrer qu'il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que, $\forall x \in E$,

$$\sum_{y\in E} yP(x, y) = ax + b.$$

En déduire que $\mathbb{E}[X_n|X_0] \to d/2$. Créer un code Matlab permettant de simuler une chaîne d'Ehrenfest et d'illustrer ce résultat de convergence.

Exercice 5. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer l'unique probabilité invariante μ de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$. A partir de la loi des grands nombres, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} X_k = a \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} X_k^2 = b \qquad \text{p.s.}$$

avec a et b à déterminer. Créer un code Matlab permettant de simuler cette chaîne de Markov et de vérifier ces résultats de convergence.

3 Chaîne de Markov sur le tore

Soient $x_0, \ldots, x_{k-1}$ les racines k-ème de l'unité ($x_j = \exp \frac{2ij\pi}{k}$, $j = 0 \ldots k-1$) et $0 < p < 1$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires dont la loi est définie par:

$$\begin{aligned}
X_0 &= x_0 \\
P(X_{n+1} = x_{j+1}|X_n = x_j) &= 1 - P(X_{n+1} = x_{j-1}|X_n = x_j) = p,\ (n > 0 \text{ et } 0 < j < k-1) \\
P(X_{n+1} = x_0|X_n = x_{k-1}) &= 1 - P(X_{n+1} = x_{k-2}|X_n = x_{k-1}) = p,\ (n > 0) \\
P(X_{n+1} = x_1|X_n = x_0) &= 1 - P(X_{n+1} = x_{k-1}|X_n = x_0) = p,\ (n > 0).
\end{aligned}$$

1. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov irréductible.
2. Etudier la périodicité de la chaîne en fonction de la parité de k.

3. Ecrire la matrice de transition P de la chaîne.

4. Quels sont les vecteurs v de $\mathbb{R}^k$ satisfaisant $v^T P = v^T$?

5. A partir de maintenant on se place dans le cas où la chaîne est apériodique. Que vaut $\lim_{n\to\infty} P^n$?

6. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i=x_j\}}$, $j = 0\dots k-1$ converge en probabilité quand n tend vers l'infini vers une limite indépendante de j.

7. Vérifier numériquement les points 2 et 6.

4 La ruine du joueur

Soit (ε_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. avec

$$\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 0) = 2\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = 2\mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Soit α la solution positive de l'équation $\cosh x = 3$. On rappelle que la fonction $\cosh x$ vaut, pour $x \in \mathbb{R}$, $1/2(\exp(x) + \exp(-x))$. On pose, $S_0 = M_0 = 0$, $N_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n := \sum_{j=1}^n \varepsilon_j,\ M_n = S_n^2 - \frac{n}{2},\ N_n := \frac{1}{2^n}\exp(\alpha S_n).$$

Soit $a > 0$, on pose $T_a = \inf\{n \in \mathbb{N} :\ S_n \notin]-a, a[\}$. Le but du problème est d'étudier la loi de S_{T_a} et de calculer $\mathbb{E}(T_a)$ (on fera l'hypothèse que cette espérance est finie).

1. Calculer α.

2. Les suites (S_n), (M_n) et (N_n) sont-elles des chaînes de Markov? Montrer que les trois suites (S_n), (M_n) et (N_n) sont des martingales.

3. Montrer que T_a est un temps d'arrêt pour les suites (S_n), (M_n) et (N_n).

4. Appliquer le théorème de Wald aux suites (S_n) et (M_n). En déduire la loi de S_{T_a} et la valeur de $\mathbb{E}(T_a)$.

5. Vérifier numériquement les résultats obtenus à la question précédente.