Examen final de simulations aléatoires-Seconde session

M1 MAPI3

Mardi 5 septembre 2017 de 13h30 à 16h30

Les programmes pourront être écrits en Python, R, Scilab, MATLAB

In [1]:
```
%matplotlib inline
# coding: utf8
from matplotlib.pyplot import *
from math import *
from numpy import *
from numpy.random import *
from numpy.linalg import *
from scipy.misc import *
import numpy as np, pandas as pd
#from scipy import *
```

Extrêmes droite et gauche

Soit (X_i) une suite i.i.d. de loi de Pareto de paramètre $\alpha > 0$ de densité:

$$f(x) = \frac{C\mathbf{1}_{[2,+\infty[}(x)}{x^{1+\alpha}}.$$

On pose $X_{(1)} := \min_{i=1,\cdots,n} X_i$ et $X_{(n)} := \max_{i=1,\cdots,n} X_i$.

1. Calculer la constante C.
2. Pour quelles valeurs de α, X_1 est-elle intégrable? De carré intégrable?
3. Calculer la fonction de répartition et la fonction de quantile de X_1.
4. Montrer que $X_{(1)}$ converge presque sûrement vers un réel $a > 0$ quand n tend vers l'infini. Préciser la valeur de a. Quelle est la limite en loi de $n(X_{(1)} - a)$?
5. Montrer que $X_{(n)}$ diverge presque sûrement vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.
6. Quelle est la limite en loi de $n^{-1/\alpha} X_{(n)}$?
7. Ecrire un programme pour illustrer le point 4).

Chaîne de Markov

On considère la marche aléatoire réfléchie (X_n) sur $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

1. Partant de $1, 2, 3$, ou 4, on ne peut faire qu'un pas vers la droite ou un pas vers la gauche avec la même probabilité
2. Partant de 0 (resp. de 5) on peut aller en 1 (resp. en 4) ou rester en 0 (resp. en 5) avec la même probabilité.

1. Ecrire la matrice de transition Π de la chaîne.
2. Montrer que la probabilité uniforme sur E est invariante pour Π.
3. Montrer que, quand N tend vers l'infini, $N^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} \cos(\frac{\pi}{2} X_i)$ converge presque sûrement vers $1/6$
4. Compléter le programme suivant pour illustrer le point 3).

In [3]:
```
Pi=np.matrix([[0.5,0.5,0.,0.,0.,0.], [0.5,0.,0.5,0.,0.,0.],[0.,0.5,0.,0.5,0.,0.
],
              [0.,0.,0.5,0.,0.5,0.],[0.,0.,0.,0.5,0.,0.5],[0.,0.,0.,0.,0.5,0.5]
]);
print('Transition puissance 100')
print(Pi**100);
N=10000;
X0=0;
X=zeros([1,N+1]);
X[0,0]=X0;
for i in range(1, N+1):
    p0=Pi[X0-1,0];
    p1=p0+Pi[X0-1,1];
    p2=p1+Pi[X0-1,2];
    p3=p2+Pi[X0-1,3];
    p4=p3+Pi[X0-1,4];
    u=rand(1,1);
    X0=5;
    if u<p0:
        X0=0;
    elif  u<p1:
        X0=1
    elif  u<p2:
        X0=2
    elif u<p3:
        X0=3
    elif u<p4:
        X0=4
    X[0,i]=X0
X=X[0,:];
print(mean(X));
print(1./6.*(1+2+3+4+5))
```

```
Transition puissance 100
[[ 0.16666686  0.16666676  0.16666676  0.16666657  0.16666657  0.16666648]
 [ 0.16666676  0.16666686  0.16666657  0.16666676  0.16666648  0.16666657]
 [ 0.16666676  0.16666657  0.16666686  0.16666648  0.16666676  0.16666657]
 [ 0.16666657  0.16666676  0.16666648  0.16666686  0.16666657  0.16666676]
 [ 0.16666657  0.16666648  0.16666676  0.16666657  0.16666686  0.16666676]
 [ 0.16666648  0.16666657  0.16666657  0.16666676  0.16666676  0.16666686]]
2.50624937506
2.5
```

Pont brownien

Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ le processus gaussien centré nul en 0 tel que

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = |t-s|, \quad (t,s \in [0,1]).$$

1. Montrer que, pour $t, s \in [0,1]$, on a $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \min(t,s)$.
2. Pour $t \in [0,1]$, on pose $X_t := B_t - tB_1$. Montrer que le processus $(X_t)_{t\in[0,1]}$ est gaussien et centré. Déterminer sa fonction de covariance. Quelle est la valeur de X_1 ?
3. Soit $f(t) = t(1-t)$, $(t \in [0,1])$. On désire émuler cette fonction uniquement en utilisant sa valeur en $1/2$ ($f(1/2) = 1/4$). Pour cela on utilise l'émulateur gaussien
$$\widehat{f}(t) := \mathbb{E}[X_t | X_{1/2} = 1/4], \;\; (t \in [0,1]).$$
Calculer la fonction $\widehat{f}$. Discuter du choix du processus (X_t) pour émuler la fonction f.