Exercices de révision

TD 10-Mercredi 5 Avril 2017

M1 MAPI3. Simulations aléatoires

Extrêmes

On considère (X_n) une suite i.i.d. de densité f sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que f peut s'écrire:

$$f(x) = \varphi'(x)\exp(-\varphi(x)), \ (x \in \mathbb{R}_+),$$

où φ est une fonction dérivable, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ de limite $+\infty$ en ∞. On suppose par ailleurs que $\varphi(0) = 0$.

1. On suppose que φ' est continue à droite en 0 et que $\varphi'(0) > 0$. Quelle est la loi limite de $\inf_{i=1,\dots,n} X_i$. Discuter du cas $\varphi'(0) = 0$.
2. On suppose à partir de maintenant que $\varphi(x) = x^a$ $(a > 0)$. Calculer la fonction de quantile de X_1.
3. Déterminer une suite (a_n) et une suite (b_n) telles que $(b_n)(\sup_{i=1,\dots,n} X_i - a_n)$ converge en loi (vers une loi non triviale). Quelle est alors la loi limite?

Mouvement brownien

Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ le processus gaussien centré nul en 0 tel que

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = |t - s|, \quad (t, s \in [0, 1]).$$

1. Montrer que, pour $t, s \in [0, 1]$, on a $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \min(t, s)$.
2. Soit $f(t) = t(1 - t)$, $(t \in [0, 1])$. On désire émuler cette fonction uniquement en utilisant ses valeur en $1/2$ et 1 $(f(1/2) = 1/4$ et $f(1) = 0)$. Pour cela on utilise l'émulateur gaussien
$$\widehat{f}(t) := \mathbb{E}[X_t | X_{1/2} = 1/4, X_1 = 0], \ (t \in [0, 1]).$$
Calculer la fonction $\widehat{f}$. Discuter du choix du processus (X_t) pour émuler la fonction f.

Fish inequality

On considère une variable aléatoire Z de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $(N_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Poisson d'intensité 1.

1. Montrer les égalités suivantes:
$$\mathbb{E}[(Z-\lambda)^2] = \lambda$$
$$\mathbb{E}[(Z-\lambda)^3] = \lambda$$
$$\mathbb{E}[(Z-\lambda)^4] = \lambda(1+3\lambda).$$
2. En déduire deux inégalités de concentration pour Z autour de son espérance. C'est-à-dire, donner deux inégalités sur $\mathbb{P}(|Z-\lambda| \geq t),\ (t>0)$.
3. Pour $\tau \in \mathbb{R}$, calculer la transformée de Laplace $\exp(\psi(\tau))$ de Z. Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}_+$ on a
$$\psi^*(t) := \sup_{\tau \in \mathbb{R}} (t\tau - \psi(\tau)) = t \log \frac{t}{\lambda} - t + \lambda,$$
et pour $t < 0$,
$$\psi^*(t) := \sup_{\tau \in \mathbb{R}} (t\tau - \psi(\tau)) = +\infty.$$
4. Montrer l'inégalité de concentration:
$$\mathbb{P}(|Z-\lambda| \geq t) \leq \exp(-\psi^*(\lambda+t)) + \exp(-\psi^*(\lambda-t)), \quad (t>0).$$
5. Déduire des points précédents trois inégalités de concentration pour $|\frac{N_u}{u} - 1|$.

Markov dog

Pour $0 \leq \theta \leq 1$, on considère la chaîne de Markov (X_n) à six états $\{1,2,3,4,5,6\}$ de matrice de transition
$$\begin{pmatrix} \frac{2(1-\theta)}{3} & \frac{(1-\theta)}{6} & \frac{(1-\theta)}{6} & \theta & 0 & 0 \\ \frac{(1-\theta)}{2} & \frac{(1-\theta)}{2} & 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-\theta)}{2} & \frac{(1-\theta)}{2} & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
et d'état initial $X_0 = 1$.

1. On suppose que $\theta = 0$.
   A. Montrer que l'on ne visite jamais les états $\{4,5,6\}$ mais qu'avec la condition initiale choisie les états $\{1,2,3\}$ sont récurrents.
   B. En déduire que l'on peut restreindre l'étude en ne considérant qu'une chaîne à trois états que l'on précisera.
   C. Ecrire la matrice de transition de cette nouvelle chaîne et calculer sa probabilité invariante. Quelle est la limite presque sûre de $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^n X_j$?
2. On suppose maintenant que $\theta \neq 0$. Soit $A = \{1,2,3\}$, on pose
$$N_A := \inf\{n \in \mathbb{N}^* :\ X_n \notin A\}.$$
   A. Montrer que la variable aléatoire N_A est presque sûrement finie. Déterminer sa loi.
   B. Montrer que pour $n \geq N_A$ on a $X_n \notin A$. Combien de temps, en moyenne, passe t'on sur l'ensemble A avant de le quitter définitivement?
   C. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $Y_n := X_{n+N_A}$. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov sur un espace d'états que l'on précisera. Déterminer son état initial et sa transition.
   D. Montrer qu (Y_n) est récurrente et irréductible. Calculer sa probabilité invariante.
   E. Quelle est la limite presque sûre de $\overline{Y_n} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y_j$? En déduire celle de $\overline{X_n}$.