Modèle statistique

TD5-MAPI3

2016-2017

Exercice 1

Pour les modèles statistiques suivants, dire s'ils sont ou non paramétriques. On note μ_f la loi de probabilité ayant pour densité f.

1. $\mathcal{P} = \{\mu_f \,;\, f(0) = 1\}$.
2. $\mathcal{P} = \{\mathcal{E}(\theta) \,;\, \theta > 0\}$
3. $\mathcal{P} = \{\mu_f \,;\, \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$
4. $\mathcal{P} = \{\mu_f \,;\, \exists \theta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(\theta - x) = f(\theta + x)\}$
5. $\mathcal{P} = \{\mu_f \,;\, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0\}$
6. $\mathcal{P} = \{\mu = \alpha\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) + \beta\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2); \alpha \geq 0, \beta \geq 0, m_i \in \mathbb{R}, \sigma_i^2 > 0\}$

Exercice 2

Soit $X_1, ...X_n$, n réalisations i.i.d. d'une variable aléatoire X telle que $\mathbb{E}(X) = m$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Soit $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ la moyenne empirique et $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$ la variance empirique. Ces deux quantités sont-elles des estimateurs de m et σ^2 respectivement ? Si oui, calculer leur biais.

Exercice 3

On jette une pièce. Elle fait pile avec probabilité θ et face avec probabilité $1 - \theta$. Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si la pièce fait pile, 0 sinon.

1. Quelle est la loi de X ? Quel est le modèle statistique associé ?
2. Soient $\delta(X) = X$ et $\delta'(X) = 1 - X$ deux variables aléatoires. Sont-elles des estimateurs de θ ? Sont-elles indépendantes (sous $\mathbb{P}_\theta$, en fonction de $\theta \in \Theta$)?
3. Calculer le biais et l'erreur quadratique moyenne de δ et δ'.

Exercice 4

On observe n voitures identiques se déplaçant à la même vitesse constante sur un circuit. Chacune de ces voitures dispose au départ d'une quantité d'essence inconnue (et possiblement différente d'une voiture à l'autre). On note X_i la distance parcourue par la voiture i jusqu'à la panne d'essence.
Soit θ la distance maximale que peut parcourir une voiture.

1. Donner le modèle statistique correspondant à l'observation du n échantillon $X = (X_1, ...X_n)$. Ce modèle est-il paramétrique ?
2. Donner la vraisemblance du modèle (Rq : les observations sont des distances donc X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$).
3. On propose comme estimateur de θ la statistique $\hat{g}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Calculer son biais et son erreur quadratique moyenne.
4. Proposer un autre estimateur de θ (indication : chercher l'estimateur du maximum de vraisemblance). Est-il sans biais ?