TP1

January 19, 2017

Université Paul Sabatier 2016-2017, L3 MAPI3 MES http://www.math.univ-toulouse.fr/l31

1 Simulations stochastiques - TP1

- Le rouge est réservé aux densité et fonction de répartition théoriques (versus empiriques).
- L'échelle verticale de la fonction hist correspond à des comptages. L'option normed=True permet d'obtenir une aire totale égale à 1.
- En tête pour charger les fonctions nécessaires au TP.

```
In [ ]: %matplotlib inline
        from matplotlib.pyplot import *
        from math import *
        from numpy import *
        from numpy.random import *
        from scipy.misc import *
        #from scipy import *
```

1.1 Question 1: Simulation d'une variable aléatoire uniforme dans [0,1].

```
In [ ]: X = rand(5,1);
        print(X)            ## Les arguments correspondent à la taille du tableau de sortie
        hist(X);            ## hist affiche par défaut des sommes (non normalisé).
```

```
In [ ]: N=10**4;
        X=rand(N,1);
        print(linspace(0,1,6))                          ## linspace génère 6 points uniformément
        hist(X, bins = linspace(0,1,6), normed = True); ## hist trace l'histograme de "X", les s
        plot( linspace(0.1,0.9,5), [1]*5, 'ro' );       ## 'ro' trace des points ronds rouges
```

```
In [ ]: N=10**6; X=rand(N,1);
        hist(X, bins = linspace(0,1,101), normed = True);
        plot([0,1],[1,1],'r')    ## 'r' trace une ligne en rouge
```

1.2 Question 2: Loi exponentielle de paramètre 1/2.

L'espérance 2, cf exponential. Pour $x > 0$, $f(x) = (1/2)e^{-x/2}$ et $F(x) = 1 - e^{-x/2}$. $F^{-1}(u) = -2\ln(1-u)$ où $1 - U \sim U$.

```python
In [ ]: N=10**4; U=rand(N,1);
        X=-2*log(U);                                    ## application terme à terme du lo
        hist(X, bins = linspace(0,10,51), normed = True);
        xx=linspace(0,10,201);
        plot(xx,exp(-xx/2)/2 ,'r')
```

```python
In [ ]: X=exponential(2, (N,1));
        hist(X, bins = linspace(0,10,51), normed = True);
        plot(xx,exp(-xx/2)/2,'r')
```

```python
In [ ]: N = 10**3;
        X=exponential(2, (N,1));
        X=sorted(X);
        plot(X,linspace(1/N,1,N))        ## Tracé de la fonction de répartition empirique
        plot(xx,1 - exp(-xx/2),'r')
```

1.3 Question 3: Minimum de deux lois exponentielles.

Si $X, Y \sim \text{Exp}(1/2)$ sont indépendantes, $\min\{X, Y\} \sim \text{Exp}(1)$.

```python
In [ ]: N = 10**4; X=exponential(2, (N,2));
        print(X[0,:])
        X=sort(X,axis = 1); ## sort trie chaque ligne (selon le second axe, la numérotation comm
        hist(X[:,0], bins = linspace(0,5,26), normed = True); ## X[:,0] donne la première colone
        xx=linspace(0,5,101)
        plot(xx,exp(-xx),'r')
```

1.4 Question 4: Uniforme $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$.

```python
In [ ]: N=10**3; X=ceil(10*rand(N,1));
        hist(X, bins = linspace(0.5,10.5,11), normed = True);
        plot( linspace(1,10,10), [1./10]*10, 'ro' );
```

```python
In [ ]: E=zeros((10,1))

        for i in range(N):                               ## range(N) renvoie [0,1,2,...,N-1]
            E[ int(X[i]) - 1 ] = E[ int(X[i]) - 1 ] + 1  ## Conversion en entier pour accéder à

        F = cumsum(E)/N  ## cumsum calcule les sommes partielles

        for i in range(10):
            plot([i, i+1],[F[i], F[i]], 'b')
            plot([i, i+1],[float(i+1)/10, float(i+1)/10],'r')
```

1.5 Question 5: Poisson de paramètre 4.

$P(X = k) = e^{-4}4^k/k!$ où $k \in \mathbb{N}$. $k = i - 1$ dans le code.

```
In [ ]: N=10**4; X=zeros((N,1));
        p = zeros((19,1))
        for i in range(19):
            p[i] = exp(-4) * 4**(float(i)) / factorial(i)

        cp = cumsum(p)
        cp = append(cp,1)   ## append rajoute un élément à la fin du tableau

        for i in range(N):
            X[i] = where(rand() < cp)[0][0]   ##where( ... )[0][0] donne le premier indice tel q

        hist(X, bins = linspace(-0.5,19.5,21), normed = True);
        plot( range(19), p, 'ro' );
```

1.6 Question 6: Simulation de loi de Poisson par les produits d'uniformes.

$\prod_{j=1}^{K+1} U_j < e^{-5} \leq \prod_{j=1}^{K} U_j$ définit K qui s'avère Poi(5).

```
In [ ]: N=10**4; K=-ones((N,1));
        for i in range(N):
            produit = 1;
            while produit>exp(-5):
                produit = produit*rand();
                K[i]=K[i]+1;

        hist(K, bins = linspace(-0.5,19.5,21), normed = True);
        xx=linspace(0,18,19)
        plot( xx, exp(-5)*5**xx / factorial(xx), 'ro' );
```

1.7 Question 7: Box Muller.

Vecteur gaussien. (X, Y). $X^2 + Y^2 \sim \text{Exp}(1/2)$. Algorithme de génération de la loi normale à partir de générateurs aléatoires uniformes U et V sans utiliser F et F^{-1}, non explicites.

```
In [ ]: N=10**5;
        X=normal(0, 1, (N,1));
        Y=normal(0, 1, (N,1));
        plot(X,Y,'.')
```

```
In [ ]: hist(X**2 + Y**2, bins = linspace(0,10,51), normed = True);
        xx=linspace(0,10,51);
        plot(xx, exp(-xx/2)/2 ,'r')
```

```
In [ ]: U=rand(N,1); V=pi*rand(N,1);
        X = sqrt(-2*log(U)) * cos(V)
        hist(X, bins = linspace(-3,3,31), normed = True);
        xx=linspace(-3,3,121);
        plot(xx, exp(-xx**2/2)/(sqrt(2*pi)), 'r')
```