Grandes déviations et événements rares

Echantillonnage préférentiel et théorème de Cramér

Pour $n \geq 1$, on considère un échantillon $X_1 \ldots, X_n$ de variables i.i.d. de loi F. On prendra, par exemple, $n = 50, 100, 500$. Comme toujours, on pose $\overline{X_n} := n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$. On étudiera les cas suivants :

- F est la loi gaussienne standard,
- F est la loi exponentielle de paramètre 1,
- F est la loi de Poisson de paramètre 1,
- F est la loi de Bernoulli équilibrée,
- F est la loi géométrique de paramètre 1/2.

Pour $c > \mathbb{E}(X_1)$, on pose $p(c) := \mathbb{P}(\overline{X_n} \geq c)$. On souhaite ici comprendre expérimentalement à partir de quel niveau c le théorème de Bahadur-Rao donne une meilleure approximation que celui de la limite centrale.

1. Tracer à l'aide des fonctions `Scilab cdfbin, cdfgam, cdfnbn, cdfnor, cdfpoi` les courbes $p(c)$.
2. Reprendre la question précédente mais estimer les probabilités à l'aide d'une méthode de Monte Carlo *de base*.
3. Reprendre la question précédente mais estimer les probabilités à l'aide d'une méthode de Monte Carlo qui utilise le changement de probabilité des grandes déviations. Conclusions?
4. Tracer les approximations $\widehat{p}(c)$ et $\tilde{p}(c)$ obtenues par utilisation du théorème de Bahadur Rao et de la limite centrale. Conclusions?