UPS TOULOUSE III **MODELISATION**
MAF, TP2 **2015**

Processus de Galton-Watson

1 Rappels

On se propose d'étudier l'évolution d'une population de taille Z_n à la génération n, modélisée par le processus suivant, appelé processus de branchement ou processus de Galton-Watson:

- $Z_0 = 1$.
- Chaque individu a pour probabilité p_k d'avoir k descendants, avec $k = 0, 1, ...$

On note m l'espérance de la loi de fécondité: $m = \sum_{k=1}^{+\infty} kp_k$. Alors, si $m < +\infty$, $\mathbb{E}Z_n = m^n$.

Suivant la valeur de m, trois comportements asymptotiques distincts vont se présenter:

1. Si $m < 1$, on est dans le **cas sous-critique** et la population va s'éteindre presque sûrement. De plus la loi conditionnelle de Z_n sachant que $Z_n > 0$ admet une loi limite.
2. Si $m > 1$, on est dans le **cas sur-critique**. La population peut s'éteindre avec la probabilité q, où q est l'unique solution de l'équation $x = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k x^k$. Si la loi de fécondité admet un moment du deuxième ordre σ^2, alors $m^{-n}Z_n$ admet une limite presque-sûre W et converge en moyenne quadratique vers la variable aléatoire W, de moyenne 1, de variance $\sigma^2/(m^2 - m)$. On a aussi $(Z_n - m^n W)/\sqrt{Z_n}$ qui tend en loi vers une loi gaussienne centrée de variance $\sigma^2/(m^2 - m)$.
3. Si $m = 1$, on est dans le **cas critique**. Z_n tend presque sûrement vers 0. Si la loi de fécondité admet un moment du deuxième ordre σ^2, on a aussi $nP(Z_n > 0) \lim_{n\to\infty} 2/\sigma^2$ et $\frac{1}{n}\mathbb{E}(Z_n | Z_n > 0) \lim_{n\to\infty} \sigma^2/2$.

2 Exercice

1. **Exercice d'illustration** Simuler un processus de Galton-Watson pour lequel chaque individu admet de 0 à 2 descendants, avec le choix de p_0 et de p_1. On suppose que $Z_0 = 1$. Calculer m l'espérance et q la probabilité d'extinction (p_0/p_2 si $m > 1$).
   - Dans le cas où $m < 1$, représenter une évolution de la population (Z_n en fonction de n); on la chosira pas trop courte. Pour 100 trajectoires, calculer la moyenne empirique de Z_n pour chaque n et vérifier que m^{-n} fois cette moyenne est proche de 1.
   - Dans le cas où $m > 1$, représenter une évolution de la population (Z_n en fonction de n), puis représenter plusieurs trajectoires de $m^{-n}Z_n$.
   - Dans le cas où $m = 1$, représenter une évolution de la population (Z_n en fonction de n). Pour 100 trajectoires pour lesquelles $Z_n > 0$, calculer la moyenne empirique de Z_n sachant $Z_n > 0$ (on utilisera $n = 10, 20, 50$). Vérifier que cette moyenne est proche de $n.\sigma^2/2$.