

Statistiques d'ordre et extrêmes

1 Étude empirique des lois limites des extrêmes

1.1 Étude théorique

On considère un échantillon X_1, \dots, X_n , ($n \in \mathbb{N}^*$) de variables aléatoires i.i.d. de densité f supportée par un intervalle \mathbb{R} . Déterminer la densité de $Z_n := \max_{i=1, \dots, n} X_i$. Trouver des suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n(Z_n - b_n)$ converge en loi dans les cas suivants :

1. f est la loi de Rayleigh, sur \mathbb{R}^+ $f(x) := x \exp(-x^2/2)$,
2. f est loi exponentielle de paramètre 1,
3. f est la loi uniforme sur $[0, 1]$,
4. f est la loi de Cauchy,
5. f est la loi de Pareto de densité sur $]1, +\infty[$ $f(x) := \alpha x^{-1-\alpha}$, ($\alpha > 0$).

1.2 Étude Numérique

Simuler N échantillon de taille n de loi f et illustrer les résultats limites mis en évidence dans le paragraphe précédent.

2 Médiane

2.1 Médiane d'une loi

On se place dans le même cadre que celui de l'exercice précédent. On appelle médiane le plus petit réel μ tel que $\mathbb{P}(X_1 \leq \mu) \geq 1/2$. Montrer que μ minimise la fonction $\varphi(x) := \mathbb{E}|X_1 - x|$, ($x \in \mathbb{R}$). Calculer les médianes des lois de l'exercice précédent.

2.2 Médiane empirique

soit μ_n l'unique minimiseur de la fonction

$$\varphi_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - x|, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Calculer μ_n . Montrer que μ_n converge en probabilité vers μ et que $\sqrt{n}(\mu_n - \mu)$ converge en loi vers une gaussienne centrée de variance à préciser.

2.3 Étude Numérique

Dans le cadre des lois de la section précédente, illustrer par des simulations les deux résultats limites sur la médiane empirique.