Examen du 8 avril 2015 de 8h à 10h

Notes de cours et calculatrices autorisées

1 Chaîne de Markov

Pour d un entier naturel strictement supérieur à 1, on considère la chaîne de Markov sur $E = \{1, 2, 3, \cdots, d\}$ de loi initiale $\mathbb{P}(X_0 = j) = q_j$, $(j \in E)$ et de matrice de transition $\Pi = (\pi_{ij})_{i,j \in E}$ **symétrique**. On suppose que, pour tout $i \neq 2$ $\pi_{1i} > 0$ et $\pi_{12} \geq 0$.

1. Discuter suivant la valeur de $\pi_{1,2} \geq 0$ de la nature des états et de la chaîne.
2. On suppose que la chaîne est récurrente. Montrer que Π possède une unique probabilité invariante μ. Que vaut, pour $i \in E$, μ_i? Montrer que la limite presque sûre de $n^{-1} \sum_{j=1}^{n} X_j$ vaut $\frac{l+1}{2}$?
3. On suppose que $\pi_{1,2} = 0$ et que la chaîne n'est pas récurrente. Montrer que Π possède deux probabilités invariantes. On suppose $q_2 = 0$, que vaut la limite presque sûre de $n^{-1} \sum_{j=1}^{n} X_j$? On suppose $q_2 = 1$, que vaut la limite presque sûre de $n^{-1} \sum_{j=1}^{n} X_j$?

2 Vecteur gaussien

Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$ de moyenne $m := (m_1, m_2, m_3)^T$ et de matrice de variance covariance

$$\Gamma := \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & c_2 & c_3 \\ c_2 & \sigma_2^2 & \rho\sigma_2\sigma_3 \\ c_3 & \rho\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}.$$

On suppose $\det \Gamma \neq 0$.

1. Montrer que la matrice $\tilde{\Gamma} := \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & \rho\sigma_2\sigma_3 \\ \rho\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$ est de rang plein.
2. Calculer $\tilde{\Gamma}^{-1}$.
3. Donner le prédicteur optimal de X_1 lorsque l'on observe seulement $(X_2, X_3)^T$.
4. Un agriculteur argentin a modélisé les températures $(T_1, T_2, T_3)^T$, moyennées sur un journée mesurées en trois points de son hacienda comme un vecteur gaussien d'espérance $(25, 25, 25)^T$ et de matrice de variance covariance

$$4 \begin{pmatrix} 1 & -\rho & \rho^2 \\ -\rho & 1 & -\rho \\ \rho^2 & -\rho & 1 \end{pmatrix}.$$

   Un jour T_1 ne peut pas être mesurée mais T_2 vaut 26 et T_3 vaut 25. On suppose que $\rho = 0.5$ donner une prédiction pour T_1.

3 Approximations de la loi binomiale

Soit X_n une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, \theta_n)$, $(n \in \mathbb{N}^*, 0 < \theta_n < 1)$.

1. On suppose que la suite θ_n est constante. Soit θ cette constante. Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n - n\theta}{\sqrt{n}} < t\right) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\theta(1-\theta)}\right)}{\sqrt{2\pi\theta(1-\theta)}} dx. \tag{1}$$

2. On ne suppose plus que la suite θ_n est constante. Mais on suppose que

$$\lim_{n\to\infty} n\theta_n = \lambda > 0.$$

   Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{2}$$

3. La mutation d'un certain gène a une probabilité p d'être présente chez un individu donné. On observe un échantillon de $n = 10000$ individus. En expliquant soigneusement la modélisation utilisée, donner une approximation numérique des probabilités suivantes :

   (a) $\mathbb{P}$(Observer au moins un mutant), si l'on suppose que la mutation du gène est très rare, $p = 10^{-4}$,

   (b) $\mathbb{P}$(Observer plus de 3021 mutants), si l'on suppose que la mutation du gène est fréquente, $p = 0.3$.