Révisions

1 Chaîne de Markov à trois états

Pour $\theta \in [0,1]$, on considère la chaîne de Markov sur $E = \{1,2,3\}$ d'état initial $X_0 = 1$ et de matrice de transition

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\theta}{2} & \frac{1}{2}(1-\theta) \\ \theta & 1-\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Discuter suivant la valeur de θ de la nature des états et de la chaîne.
2) On suppose que $\theta = 1$. Calculer $\mathbb{P}_1(X_4 = 1)$.
3) On suppose que $\theta = 0.5$. Que vaut la limite presque sûre de $n^{-1}\sum_{j=1}^{n} X_j$?

2 Vecteur gaussien

Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^k$, $(k \geq 2)$. On suppose que X est centré de matrice de variance-covariance l'identité. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^k$. Soit u, v deux vecteurs orthogonaux et normés de $\mathbb{R}^k$.

a) Quelle est la loi du couple $(\langle u, X\rangle,\ \langle v, X\rangle)$?
b) Quelle sont les lois des variables suivantes :
   - $\langle u, X\rangle^2 + \langle v, X\rangle^2$,
   - $\dfrac{\langle u, X\rangle}{\langle v, X\rangle}$?

3 Pont brownien

Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ le processus gaussien centré nul en 0 tel que

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = |t-s|, \quad (t, s \in [0,1]). \tag{1}$$

1. Montrer que, pour $t, s \in [0,1]$, on a $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \min(t,s)$.
2. Pour $t \in [0,1]$, on pose $X_t := B_t - tB_1$. Montrer que le processus $(X_t)_{t\in[0,1]}$ est gaussien et centré. Déterminer sa fonction de covariance. Quelle est la valeur de X_1?
3. Soit $f(t) = t(1-t)$, $(t \in [0,1])$. On désire émuler cette fonction uniquement en utilisant sa valeur en 1/2 ($f(1/2) = 1/4$). Pour cela on utilise l'émulateur gaussien
$$\widehat{f}(t) := \mathbb{E}[X_t | X_{1/2} = 1/4],\ (t \in [0,1]).$$
Calculer la fonction $\widehat{f}$. Discuter du choix du processus (X_t) pour émuler la fonction f.
4. Tracer dans un même repère orthonormée les courbes représentatives des fonctions f et $\widehat{f}$.

4 Approximations de la loi binomiale

Soit X_n une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, \theta_n)$, $(n \in \mathbb{N}^*, 0 < \theta_n < 1)$.

1) On suppose que la suite θ_n est constante. Soit θ cette constante. Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n - n\theta}{\sqrt{n}} < t\right) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\theta(1-\theta)}\right)}{\sqrt{2\pi\theta(1-\theta)}} dx. \tag{2}$$

2) On ne suppose plus que la suite θ_n est constante. Mais on suppose que

$$\lim_{n\to\infty} n\theta_n = \lambda > 0.$$

Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{3}$$

3) La mutation d'un certain gène a une probabilité p d'être présente chez un individu donné. On observe un échantillon de $n = 10000$ individus. En expliquant soigneusement la modélisation utilisée, donner une approximation numérique des probabilités suivantes :

   a) $\mathbb{P}$(Observer au moins un mutant), si l'on suppose que la mutation du gène est très rare, $p = 10^{-4}$,

   b) $\mathbb{P}$(Observer plus de 3021 mutants), si l'on suppose que la mutation du gène est fréquente, $p = 0.3$.

5 Chaîne de Markov à 2 états

Un signal binaire à valeurs dans $\{0, 1\}$ est transmis sur une ligne comportant N relais. Pour $n = 1, \dots, N$, on note X_n la valeur du signal à la sortie du relais n. A chaque passage de relais le signal peut subir une altération avec une probabilité $p \in]0, 1[$. C'est-à-dire que si x est la valeur du signal à l'entrée d'un relais, il y a une probabilité p que le signal à la sortie de ce relais vaille $1 - x$ et une probabilité $1 - p$ qu'il vaille x. On suppose que les erreurs commises entre les relais sont indépendantes et sont aussi indépendantes du signal initial X_0.

1) Montrer que $(X_n)_{n \leq N}$ est une chaîne de Markov irréductible.

2) La chaîne est-elle récurrente ou transiente?

3) Montrer que la probabilité invariante est la loi de Bernoulli de paramètre 0.5. Quelle est la limite en loi, quand N tend vers l'infini, de X_N? Donner une interprétation intuitive de ce résultat.