

TD 8. Tests d'hypothèses (Suite)

1 Puissance

Quelle est l'effectif nécessaire n , pour qu'avec une erreur de première espèce de 5%, on détecte une différence de moyenne égale à 0.6 fois l'écart type, avec une erreur de deuxième espèce inférieure à 1%.

2 Test de Student

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Soient $(X_j)_{j=1\dots n}$ et $(Y_j)_{j=1\dots n}$ $2n$ variables aléatoires indépendantes. On suppose que, pour $j = 1 \dots n$, X_j (respectivement Y_j) suit la loi normale de moyenne a et d'écart type σ (respectivement de moyenne b et d'écart type σ).

1. Quelle est la vraisemblance associée aux observations $Z := (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$? Calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance \hat{a} , \hat{b} , $\hat{\sigma}^2$.
2. Montrer que \hat{a} et \hat{b} peuvent s'écrire sous la forme

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \langle v_1, Z \rangle \quad \hat{b} = \frac{1}{n} \langle v_2, Z \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur \mathbb{R}^{2n} et v_1, v_2 sont des vecteurs de \mathbb{R}^{2n} à préciser. Montrer que $\hat{\sigma}^2$ est un estimateur biaisé. Proposer un estimateur sans biais de σ^2 . Dans la suite on appelle S^2 cet estimateur.

3. Vérifier que $S^2 = \frac{1}{2n-2} \|Z - \hat{a}v_1 - \hat{b}v_2\|^2$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^{2n} . Quelle est la loi de :

$$T = \frac{\sqrt{n}(\hat{a} - \hat{b} - (a - b))}{\sqrt{2}S}.$$

On justifiera sa réponse

4. Construire un test d'hypothèse de $H_0 a = b$ contre $H_1 a \neq b$ basé sur T . Application numérique :

$$n = 100; \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 150,4 \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 = 160,2$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 120,11 \quad \sum_{i=1}^n y_i = 110,33.$$

3 Fruitier

Un producteur de fruits a constaté sur des récoltes de plusieurs années, qu'en moyenne le poids d'une pomme d'une variété A , est supérieur de 12 grammes au poids d'une pomme d'une variété B . Il veut savoir si cette différence subsiste si l'on utilise un nouveau type d'engrais. On admet que dans tous les cas le poids d'une pomme suit une loi normale de variance 66. Le producteur pèse 25 pommes de la variété A et de la variété B . Ces 50 pommes ont toutes été traitées avec le nouvel engrais. Il observe alors un poids moyen de 116 grammes pour la variété A et de 109 grammes pour la variété B . Tester si le nouvel engrais améliore de façon identique le rendement pour les variétés A et B .

3.0.1 Beurre ou ordinaire ?

Une firme de margarine a invité 200 hommes et 200 femmes pour savoir si il peuvent distinguer le beurre de la margarine. Les résultats sont :

- 120 femmes ont distingué le beurre de la margarine.
- 108 hommes ont distingué le beurre de la margarine.

La faculté de reconnaissance du beurre est-elle la même pour les hommes et pour les femmes ?

3.1 Bonbecs

Un expérimentateur offre quatre types de bonbons de différentes tailles à des personnes en leur demandant d'en prendre juste un. Parmi 100 enfants tentés, 60 ont choisi un bonbon de la plus grande taille. Tandis que parmi 120 adultes 60 l'ont choisi. Est-il évident que la tentation de "grand bonbon" est différente chez les enfants et chez les adultes ?

3.2 Traitement

On compare les effets d'un même traitement dans deux hôpitaux différents. Dans le premier hôpital, sur 100 malades traités, 70 montrent des signes de guérison alors que dans le second hôpital, sur 150 malades traités, 100 sont sur le point de guérir. Quelle conclusion peut-on en tirer, au risque 5% ?

4 Course et altitude

Des athlètes ont réalisé une course de 400 mètres au niveau de la mer et en haute altitude leurs temps sont les suivants (en seconde) :

Coureur	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Niveau mer	48.3	47.6	49.2	50.3	48.8	51.1	49.0	48.1	50.7	47.9
Haute alt	50.4	47.3	50.8	52.3	47.7	54.5	48.9	49.9	54.8	48.5

Tester l'hypothèse : la performance des athlètes n'est pas affectée par l'altitude.

5 Câblé

Une compagnie fabrique des câbles d'acier dans 2 usines X et Y. Deux échantillons de morceaux de câbles choisis au hasard, d'une longueur de 10 mètres, ont été extraits respectivement des usines X et Y : le premier au nombre de 9 et le second au nombre de 16. La charge de coupure de ces câbles $x_i, i = 1..9, y_j, j = 1..16$ a été déterminée en k-Newtons. Les résultats sont :

$$\bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = 30.11, \quad \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = 0.8013 \quad \bar{y} = \frac{1}{16} \sum_{j=1}^{16} y_j = 29.63, \quad \sum_{j=1}^{16} (y_j - \bar{y})^2 = 3.0206.$$

Y-a-t-il évidence que la charge de coupure est différente pour les câbles des 2 usines X et Y ?

6 Tiges

Un technicien d'atelier veut vérifier le fonctionnement de deux machines A et B qui doivent produire des tiges d'une longueur identique. Toutes les deux, sur une longue période passée, ont donné des tiges dont la longueur est à peu près une variable normale de variance $0.2cm^2$. En fait, le fonctionnement des machines est maintenant suspect. Pouvez-vous examiner cette

suspicion à sa place si la longueur totale de 20 tiges produites par la machine A vaut 824 cm et celle de 10 tiges par la machine B 395 cm ?