

TD 5. Intervalles de confiance

1 Bouc

Une compagnie aérienne fait du surbooking, c'est à dire, pour un vol donné, accepte jusqu'à 324 réservations alors que l'avion contient 300 places. On suppose que les passagers se comportent indépendamment les uns des autres et se présentent au départ avec la probabilité p . Ce jour-là, 302 passagers se présentent au départ. Donner un intervalle de confiance pour p au niveau 5%.

On suppose maintenant que $p = 0.9$. Quel nombre maximum de réservations la compagnie doit-elle accepter pour avoir une probabilité inférieure à 5% de voir trop de passagers se présenter ?

2 Loi de Laplace

Soit $X_1 \dots X_{2n+1}$ un $2n + 1$ échantillon de densité

$$f(x) = C \exp(-|x - \theta^*|), \quad x \in \mathbb{R},$$

où θ^* est un paramètre réel.

1. Calculer C , $E(X_1)$ et $\text{Var}X_1$.
2. Pour estimer θ^* on propose l'estimateur empirique

$$\bar{X}_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} X_j.$$

Cet estimateur est-il biaisé ? est-il consistant ?

3. Construire, pour n grand, un intervalle de confiance de θ^* de risque 5%. Application numérique : pour $n = 100$, on a $\bar{X}_{2n+1}^{\text{obs}} = 2,1$.

3 Contrôle de qualité

Une entreprise fabrique une pièce de moteurs industriels. Parfois ces pièces se révèlent immédiatement défectives après la vente. Le taux de défaillance doit être limité à 4%. Sur 500 pièces contrôlées, 28 sont défectives.

1. Donner une fourchette de confiance pour le taux en question (risque 5%).
2. Est-ce-que la norme de qualité de production est respectée ?

4 Elections

On se propose de déterminer la taille de l'échantillon à prélever pour que, dans un sondage d'opinion concernant une élection à deux candidats A et B , le candidat gagnant sur l'échantillon soit le candidat gagnant au niveau de la population. (On rappelle que, d'après la théorie de l'échantillonnage, ceci ne peut être obtenu qu'avec une "forte probabilité"). Si p_A désigne la proportion exacte d'électeurs ayant l'intention de voter A et p_{0A} la proportion observée correspondante, il s'agit donc de prélever un échantillon d'effectif n tel que $p_{0A} > 0,5$ si $p_A > 0,5$ (et $p_{0A} < 0,5$ si $p_A < 0,5$) avec "forte probabilité".

1. D'une façon générale (c'est-à-dire sans préciser la valeur de n , ni celle de p_A) :
 - (a) Quelle est la distribution d'échantillonnage de p_{0A} (moyenne, écart-type, forme) ?
 - (b) Quelle est la probabilité pour que p_{0A} soit inférieure à 0,5 ?
2. On donnera pour chacune des cases du tableau suivant la probabilité pour que p_{0A} soit inférieure à 0,5.

0,4	0,45	0,475
100		
400		
1000		

3. Les résultats obtenus ci-dessus confirment qu'on peut ne pas être certain que $p_{0A} < 0,5$, si $p_A < 0,5$. On se propose donc de vouloir limiter à 5% le risque que $p_{0A} > 0,5$, quand $p_A = 0,48$. Combien faut-il interroger d'électeurs ?

5 Une souris verte..

On inocule une maladie toujours mortelle sans traitement à des souris afin de savoir si un certain produit peut enrayer cette maladie.

On observe un échantillon de 100 souris et on compte le nombre de souris guéries. Sur cet échantillon, on dénombre 64 guérisons.

1. Donner un intervalle de confiance pour p proportion de guérison.
2. Quelle aurait dû être la taille minimum n de l'échantillon pour déterminer cette proportion à 2% près, avec le coefficient de confiance 99% ?

6 Inflation

Le gouvernement d'un pays a décidé de fixer, à l'échelon national, le prix d'un produit. Il tolère une distribution des prix suivant une loi normale de moyenne 100 francs et d'écart type 10 francs. Ne pouvant vérifier les nombreux points de vente, il considère un échantillon de 36 points de vente où la moyenne de prix du produit vaut 105 francs. Doit-il considérer que ces prix sont en dehors de la norme imposée ?

7 contrôle de qualité

l'écart type de la teneur d'un composant dans un médicament est de 8 milligrammes. Un nouveau procédé de fabrication vise à diminuer cet écart type. Pour 10 mesures de teneur sur des unités fabriquées par le nouveau procédé, on obtient en mg :

725 722 727 718 723 731 719 724 726 726.

On suppose que les mesures sont des v.a gaussiennes et indépendantes. Donner un intervalle de confiance pour la moyenne avec le nouveau procédé.