TD 5. Introduction à la statistique mathématiques

1 n-échantillon d'une loi de Poisson

On considère $X_1, X_2, \dots, X_n$ un n-échantillon d'une loi de Poisson de paramètre θ inconnu, $\theta \in [0, \infty[$.

1. On cherche à estimer θ.
   (a) L'estimateur $\overline{X} = \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$ est-il sans biais ? Quel est son risque quadratique ?
   (b) Montrer que, pour tout estimateur $h(X_1, \dots, X_n)$, il existe un estimateur $\hat{h}(X_1+\dots+X_n)$ de θ de risque quadratique inférieur : $\overline{X}$ est une statistique exhaustive.
   (c) Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ?
2. On cherche maintenant à estimer $e^{-l\theta}$, probabilité pour que sur l expériences futures, on observe toujours 0.
   (a) On propose l'estimateur, $e^{l\overline{X}}$? Est-il sans biais ? Quel est son risque quadratique ?
   (b) Déterminer une fonction g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(n\overline{X})$ soit un estimateur sans biais. Que se passe-t-il si on prend $n = 1,\ \ l = 2$?

2 Loi de Pareto

On appelle la loi de Pareto unilatérale de paramètres α et r la loi de densité

$$f_{\alpha,r}(x) = \frac{\alpha r^\alpha}{x^{\alpha+1}} \mathbf{1}_{(x>r)} \quad \alpha > 0,\ r > 0.$$

1. Calculer sa moyenne (pour $\alpha > 1$) et sa variance (pour $\alpha > 2$).
2. On observe désormais un n-échantillon de cette loi. Donner une statistique exhaustive pour le paramètre (α, r).
3. En supposant α connu, déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance pour r et calculer sa loi. Cet estimateur est-il sans biais ?

3 Exercice : Autour de la loi de Gumbel et de Pareto

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $\lambda > 0$. On considère les variables aléatoires $X := \log(-\log U) - \log \lambda$ et $Y := U^{-\lambda^{-1}}$.

1. Calculer les lois de X et Y. On appelle F_λ la loi de X et G_λ celle de Y.
2. Soit $X_1, \dots, X_n$ (resp. $Y_1, \dots, Y_n$) des copies i.i.d. de X (resp. de Y). Calculer dans chacun des deux modèles la borne de Cramér Rao pour l'estimation sans biais de λ basée sur $X_1, \dots, X_n$ (resp. $Y_1, \dots, Y_n$).