TD 1. Convergences stochastiques

1 Bernoulli Poisson

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) telle que X_n suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $\theta_n \in]0,1[$. On suppose que la suite $(n\theta_n)$ converge, quand n tend vers ∞, vers $\lambda > 0$. Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ.

2 Quelques exemples d'applications du théorème de Borel Cantelli

Soit (A_n) une suite d'évènements. On définit :

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \{\omega : \ \omega \in \text{ une infinité de } A_n\} = \left\{\omega : \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = +\infty\right\}.$$

Théorème 1 (Borel-Cantelli)

1. Si $\sum_{n\geq 1} P(A_n) < +\infty$ alors $P\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n\right) = 0$.

2. Si les (A_n) sont indépendants et si $\sum_{n\geq 1} P(A_n) = +\infty$ alors $P\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n\right) = 1$.

1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que $\sum_{n\geq 1} P(X_{n+1} \neq X_n) < +\infty$. Montrer que la suite (X_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire X, c'est-à-dire qu'il existe une variable aléatoire X telle que :

$$P\left(\left\{\omega : \ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes définie par :

$$P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = \frac{1}{n^\alpha} \ \ (n \geq 1, \alpha > 0).$$

Montrer que (X_n) converge en probabilité vers 0 mais ne converge pas toujours presque sûrement.

3 Convergence en probabilité

1. Soit (X_n) une suite de variables bornées, $|X_n| \leq C$. Montrer que X_n tend vers 0 en probabilité si, et seulement si $\lim_{n\to\infty} E(|X_n|) = 0$.
2. Soit (X_n) une suite de variables telle que X_n tend vers C en probabilité. Soit f une application réelle mesurable bornée et continue au point C. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} E(f(X_n)) = f(C).$$

4 Inégalité exponentielle

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables indépendantes et de même loi définie par :

$$P(X_j = 1) = P(X_j = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Montrer que
$$P(S_n \geq a) \leq \exp -axE(\exp xS_n), \quad \forall a, x \geq 0.$$
2. Démontrer l'inégalité $\mathrm{ch} x \leq \exp \frac{x^2}{2}$ et déduire de la question précédente que :
$$P(S_n \geq a) \leq \exp \frac{-a^2}{2n}.$$
3. En déduire que presque sûrement $\underline{\lim}_{n\to\infty}(2n \log n)^{-\frac{1}{2}} S_n \leq 1$.

5 Autoregressif

Soit $(G_k)_{k\in Z}$ une suite de variables indépendantes, de même loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. Soit (c_i) une suite de réels tels que

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = 1.$$

On pose

$$X_{m,n} = \sum_{i=0}^{n} c_i G_{m-i}, \quad n \geq 0, \quad m \in Z.$$

1. Montrer que, lorsque $n \to \infty$, $X_{m,n}$ converge vers une variable X_m, dans L^2.
2. Montrer que X_m, est de loi gaussienne et calculer son espérance et sa variance.
3. Montrer que le coefficient de corrélation entre X_n et $X_{n'}$ ne dépend que de $|n - n'|$.

6 Fonctions caractéristiques

1. Calculer la fonction caractéristique de la loi de Cauchy de densité
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$
2. Soit (X_n) une suite de variables i.i.d. de densité f, calculer la fonction caractéristique de $S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ et sa limite quand n tend vers l'infini. Conclusion.