Partiel du 6 Novembre 2014- Durée 2h

Questions de cours

1. Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus sur E. Montrer que $\mathcal{A}\bigcap\mathcal{B}$ est aussi une tribu.
2. Enoncé le théorème de convergence dominée de Lebesgue.
3. Sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu de ses boréliens on considère, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, les mesures $\nu_1(dx) := \delta_a(dx)$, ν_2 la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et $\nu_3(dx) := adx$. Calculer, pour $k = 1, 2, 3$
$$\int_0^5 x(1-x)\nu_k(dx).$$

Problème

On rappelle que pour $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in [0, 2\pi]$ on pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f(\alpha, x) := \exp(\alpha \cos x) \qquad g(\alpha) := \int_0^{2\pi} f(\alpha, x)dx \qquad I_n := \int_0^{2\pi} (\cos x)^n dx.$$

1) Etablir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n ($n \in \mathbb{N}$). En déduire que, pour $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p+1} = 0$ et $I_{2p} = \frac{\pi(2p)!}{2^{2p-1}(p!)^2}$.
2) Montrer que, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$g(\alpha) = \pi \sum_{p\geq 0} \frac{\alpha^{2p}}{2^{2p-1}(p!)^2}.$$
3) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que
$$g'(\alpha) = \int_0^{2\pi} \cos x f(\alpha, x)dx = \pi \sum_{p\geq 1} \frac{\alpha^{2p-1}}{2^{2p-2}p!(p-1)!}.$$
4) Montrer que
$$\frac{1}{2}g(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha, x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\alpha, x)dx,$$
et que
$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\alpha, x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha, x)dx = 0.$$
5) Soit β un réel strictement positif, montrer que si $\beta < 1$
$$\lim_{\alpha\to-\infty} \exp(\beta\alpha) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\alpha, x)dx = \lim_{\alpha\to+\infty} \exp(-\beta\alpha) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha, x)dx = +\infty,$$
et que, si $\beta \geq 1$ ces 2 limites sont nulles. En déduire que, pour $\beta < 1$ et $|\alpha|$ assez grand
$$\exp(\beta|\alpha|) \leq g(\alpha) \leq \exp(|\alpha|).$$
6) Montrer que g est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer g''. En déduire que g est une fonction strictement convexe sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ l'équation $g'(\alpha) = \xi$ possède une solution unique notée $\alpha(\xi)$.