Examen de Statistique du 13 mai 2015-Durée 3h

1 Question de cours

On considère une expérience X de loi binomiale de paramètres 15 et p^*. H_0 est l'hypothèse $p^* = 0.4$ et H_1 est l'hypothèse $p^* = 0.8$. La fonction de répartition de l'observation est donnée dans le tableau suivant

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
H_0	510^{-4}	510^{-3}	0.027	0.09	0.22	0.40	0.61	0.79	0.90	0.966	0.991	0.998	1	1	1	1
H_1	310^{-11}	210^{-9}	610^{-8}	110^{-6}	110^{-5}	110^{-4}	810^{-4}	410^{-3}	0.018	0.061	0.164	0.352	0.62	0.833	0.965	1

1. Expliquer pourquoi la règle de décision consistant à rejeter H_0 si $X > C$ est raisonnable.
2. On prend $C = 5$ que valent les deux erreurs du test.
3. On désire que l'erreur de 1ère espèce soit égale à 10 %. Quelle valeur de C choisit-on ? Que vaut alors l'erreur de 2nd espèce ?
4. On souhaite une puissance de 93,9%. Quelle valeur de C choisit-on ? Que vaut alors l'erreur de 1ère espèce ?

2 Extrême

Soit $\theta^* > 0$, on considère la densité f_{θ^*} supportée par $]0, \theta^*[$:

$$f_{\theta^*}(x) := \frac{C_\theta^*}{\sqrt{\theta^* - x}}, \quad (x \in]0, \theta^*[).$$

1. Calculer la constante C_θ^*.
2. Soit X de densité $f_{\theta^*}(x)$. Calculer $\mathbb{E}(\theta^* - X)$. En déduire l'espérance de X. Calculer $\mathbb{E}[(\theta^* - X)^2]$. En utilisant la formule de décomposition biais variance calculer la variance de X.
3. On observe maintenant un échantillon $X_1 \ldots X_n$ i.i.d. de même loi que X. Comme d'habitude, on note $\overline{X}_n$ la moyenne empirique de l'échantillon et $X_{(n)}$ la plus grande valeur observée. On propose les deux estimateurs de θ^* : $\widehat{\theta_1} := \frac{3\overline{X}_n}{2}$ et $\widehat{\theta_2} := X_{(n)}$. Montrer que $\widehat{\theta_1}$ est sans biais et (sans calcul) que $\widehat{\theta_2}$ est biaisé.
4. Montrer que $\sqrt{5n}\frac{\widehat{\theta_1} - \theta^*}{\widehat{\theta_1}}$ converge en loi, quand n tend vers l'infini, vers une gaussienne standard. Donner un intervalle de confiance asymptotique de risque 5% de θ^*
5. Montrer que $n^2\left(1 - \frac{\widehat{\theta_2}}{\theta^*}\right)$ converge en loi, quand n tend vers l'infini, vers une loi dont on précisera la fonction de répartition et la densité. En déduire un second intervalle de confiance asymptotique de risque 5% de θ^*.
6. Parmi ces deux intervalles de confiance, lequel préconisez-vous et pourquoi ?