Examen d'Intégration et Probabilités-6 janvier 2015-Durée 3h

1 Questions de cours

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\gamma(a,\lambda)$ $(a,\lambda>0)$. On rappelle que cette loi a pour densité, par rapport à la mesure de Lebesgue :
$$f_{a,\lambda}(x) := \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1}\exp(-\lambda x)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x),\ (x\in\mathbb{R}).$$
Pour quelles valeurs de $\alpha,\mu\in\mathbb{R}$, $Y := X^\alpha \exp(\mu X)$ est intégrable ? Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
2. Enoncer le théorème de convergence dominée.
3. Enoncer le théorème de Cochran

2 Régression linéaire

Soit $n>2$ un entier naturel et $\theta := \frac{2\pi}{n}$. On pose, pour $j=1,\dots,n$, $x_j := \cos(j\theta)$. Soit (ε_j) une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de loi normale standard. Pour $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ donnés, on pose $Y_j := \alpha x_j + \beta + \varepsilon_j,\ j=1,\dots n$ et $Y := \begin{pmatrix} Y_1\\ \vdots \\ Y_n\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\sum_{j=1}^n x_j = 0$ et $2\sum_{j=1}^n x_j^2 = n$. On pourra utiliser la formule d'Euler : $2\cos x = e^{ix}+e^{-ix}$, $(\theta\in\mathbb{R})$.
2. Montrer que Y est un vecteur gaussien. Préciser sa moyenne m et sa matrice de variance covariance Γ.
3. On considère les deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ u dont toutes les composantes valent 1 et $x := \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$. Montrer que u et x sont orthogonaux. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$, comment peut-on calculer la projection orthogonale de v
   (a) sur la droite vectorielle E engendrée par u ?
   (b) sur la droite vectorielle F engendrée par x ?
   (c) sur le plan vectoriel G engendré par u et x.
4. Si L est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on note P_L le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur L. On pose $X := (u\ x)$. Montrer que la matrice X^TX est inversible. Montrer les formules suivantes :
$$P_E = \frac{uu^T}{\sqrt{n}},\ P_F = \frac{\sqrt{2}xx^T}{\sqrt{n}}\ P_G = X(X^TX)^{-1}X^T.$$
5. Pour L est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on note $U_L := \|P_LY\|^2$. On suppose que $\alpha=\beta=0$ Montrer que U_E et U_F sont des variables aléatoires indépendantes. Quelles sont leurs lois ?
6. Montrer que P_GY et $\|Y-P_GY\|^2$ sont indépendants. Quelle est la loi de $\|Y-P_GY\|^2$?

3 Un bol d'air pour Hölder

Soit d un entier naturel non nul et $x = (x_i)_{i=1,\dots,d}$, $y = (y_i)_{i=1,\dots,d}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^d$. Soit $(\alpha_i)_{i=1,\dots,d}$ des nombres réels positifs de somme 1.

1. Rappeler l'inégalité de Hölder.
2. En considérant un espace mesuré *ad hoc* que l'on explicitera, montrer que pour $p, q > 1$ avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$, on a

$$\left| \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i y_i \right|^{pq} \leq \left(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i |x_i|^p \right)^q \left(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i |y_i|^q \right)^p .$$