TD 7. Intégration et Probabilités

1 Rotation

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes toutes les deux de loi normale centrée réduite. On pose $X^T = (X_1\ X_2)$. Soit $\theta \in]0, 2\pi]$ on pose

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

et $Y(\theta) = A(\theta)X$.

1) Montrer que, pour $\theta \in]0, 2\pi]$, $Y(\theta)$ est un vecteur gaussien. Préciser sa moyenne et sa matrice de covariance.
2) Si u est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, $\|u\|$ désigne sa norme euclidienne. Montrer que, pour $\theta \in]0, 2\pi]$, $\|Y(\theta)\|^2$ suit une loi du Khi2.
3) Quelle est la loi de la variable aléatoire

$$Z = \frac{1}{2}\left[(X_1 + X_2)^2 + (X_1 - X_2)^2\right]?$$

2 Projection

Soit n un entier naturel non nul et $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ $(m \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$. On pose $\overline{X}_n := n^{-1}\sum_{j=1}^n X_j$ et $S_n^2 := (n-1)^{-1}\sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X}_n)^2$.

1. On suppose que $m = 0$ et $\sigma = 1$. Montrer que $\overline{X}_n$ et S_n^2 sont des variables aléatoires indépendantes. Quelles sont les lois de $\sqrt{n}\overline{X}_n$ et $(n-1)S_n^2$. Quelle est la loi de $\frac{\sqrt{n(n-1)}\overline{X}_n}{S_n}$?
2. Reprendre la question précédente dans le cas général en considérant $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - m)$ et $\frac{(n-1)}{\sigma^2}S_n^2$. Que valent l'espérance et la variance de $\overline{X}_n$ et de S_n^2. A quoi pourraient servir ces quantités ?
3. On ne suppose plus les variables $X_1, \ldots, X_n$ de loi gaussienne mais seulement qu'elles sont indépendantes et équidistribuées. Montrer que si l'on suppose que les variables aléatoires $\overline{X}_n$ et S_n^2 sont indépendantes alors la loi de X_1 est gaussienne.

3 Prédiction

Soit

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

un vecteur gaussien centré de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. On suppose que X_1 est un vecteur de taille $n_1 > 0$ et que X_2 est un vecteur de taille $n_2 > 0$ avec $n_1 + n_2 = n$. Soit Γ_i la matrice de covariance de X_i $(i = 1, 2)$ et R la matrice de taille $n_1 \times n_2$ contenant les covariances entre les composantes de X_1 et X_2.

1. Montrer que X_1 et X_2 sont des vecteurs gaussiens. Préciser leur loi.

2. Quelle est la matrice de variance covariance de X ?
3. On observe X_2 et l'on cherche à prédire X_1. Si $\widehat{X_1}$ est un prédicteur de X_1 son risque est mesuré à l'aide de $\mathbb{E}\|X_1 - \widehat{X_1}\|^2$. Déterminer le prédicteur linéaire de risque minimum.