

TD 6. Intégration et Probabilités

1 Intégrabilité

On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = x^\alpha$ si $x > 0$. Existe-t-il un réel p tel que $f \in L^p(\mathbb{R})$?
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f(x) = x^{-1/3}$ si $0 < x \leq 1$ et $f(x) = x^{-1}$ si $x > 1$. Existe-t-il un réel p tel que $f \in L^p(\mathbb{R})$?
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie par $f(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)|x|^{-\alpha}$.
Démontrer que $f \in L^p$ si, et seulement si, $\alpha p < 1$ et en déduire que, pour des réels p_1 et p_2 tels que $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, il existe des fonctions dans L^{p_1} et pas dans L^{p_2} .
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie par $f(x) = \mathbf{1}_{]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}(x)|x|^{-\alpha}$. Démontrer que $f \in L^p$ si, et seulement si $\alpha p > 1$ et en déduire que, pour des réels p_1 et p_2 tels que $1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$, il existe des fonctions dans L^{p_2} et pas dans L^{p_1} .

2 saucissonnage

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré où μ est de masse totale finie. Soit f une fonction réelle mesurable. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$E_n := \{x \in E : n \leq |f(x)| < n+1\}.$$

1. Démontrer que f est intégrable si, et seulement si,

$$\sum_n n\mu(E_n) < +\infty.$$

2. Démontrer que f est dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$ si, et seulement si,

$$\sum_n n^p\mu(E_n) < +\infty.$$

3. En déduire que si f est dans L^p , alors f est dans L^r pour tout $1 \leq r \leq p$.

3 Cauchy contre Schwartz

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

1. Soient f et g deux fonctions mesurables positives de E dans \mathbb{R}_+ telles que $fg \geq 1$.
Montrer que

$$\int f d\mu \int g d\mu \geq \mu(E)^2.$$

2. On suppose qu'il existe une fonction intégrable f telle que $1/f$ soit également intégrable.
Que peut-on dire de la mesure μ ?

4 Scheffé contre Lebesgue

(E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, f une fonction intégrable et (f_n) une suite de fonctions intégrable. On suppose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

1. Montrer que si les fonctions f_n sont positives et si la suite (f_n) converge presque partout vers f , alors (f_n) converge aussi vers f dans L^1 . (Indication : on pourra considérer $g_n := \min(f, f_n)$).
2. Soit (f_n) la suite de $L^1(\mathbb{R})$ définie par

$$f_n := n\mathbf{1}_{]0, 1/n[} - n\mathbf{1}_{]-1/n, 0[}.$$

Montrer que (f_n) converge vers 0 p.p. et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = 0$. La suite (f_n) converge-t-elle vers 0 dans L^p ($p \geq 1$) ?