TD 2. Intégration et Probabilités

1 Gauss

Montrer que la suite des intégrales

$$\sqrt{n}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx$$

est convergente et trouver sa limite (on fera le changement de variable $x = t/\sqrt{n}$).

2 Cosinus

Soit, pour $n \geq 0$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx.$

1. Montrer que $\sqrt{n}\, I_n$ tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx$. (Faire le changement de variable $x = t/\sqrt{n}$, puis montrer qu'on peut appliquer le théorème de convergence dominée ; il faudra pour cela trouver une majoration convenable de $\log(\cos x)$ pour $0 \leq x < \pi/2$).
2. (Re)trouver la relation de récurrence liant I_n et I_{n+2} ; en déduire la valeur de $I_{2p}I_{2p+1}$ pour $p \geq 0$, puis celle de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx$.

3 Gaussian

1. Calculer, pour $n \geq 0$ et $x > 0$, $I_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt^2}\, dt$.
   (On trouvera une formule de récurrence soit en dérivant sous le signe somme, soit en faisant une intégration par parties).
2. Soit, pour tout z complexe,
   $$G(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} e^{-zt}\, dt.$$
   Montrer que, pour tout z, on peut intégrer terme à terme la série obtenue en remplaçant e^{-zt} par sa série entière et en déduire que $G(z)$ est somme d'une série entière dont on calculera les coefficients (ne pas chercher à reconnaître la série).
3. Même exercice, en intégrant sur $]-\infty, +\infty[$ au lieu de $[0, +\infty[$; montrer que on obtient une fonction usuelle.

4 Fonction dépendant d'un paramètre I

Soit α un réel > 0. On pose, pour $t \geq 0$,

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^\alpha}{x+t}dx.$$

1. Montrer que f est finie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$.
2. Soit $f_n(x) = x^\alpha(1-x+x^2-\cdots+x^{2n}-x^{2n+1})$. Montrer que, sur $[0, 1]$, la suite des fonctions (f_n) est croissante. En déduire
   $$F(1) = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} + \cdots - \frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \cdots.$$

5 Fonction dépendant d'un paramètre II

Soit

$$F(x) = \int_0^1 e^{-x/t}\, dt \qquad \text{pour } x \geq 0.$$

1. Vérifier brièvement qu'on définit bien ainsi une fonction F continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer qu'on peut dériver l'expression de F sous le signe somme en tout point $x > 0$.
3. Montrer que F n'est pas dérivable à droite en 0 (on pourra montrer que $F'(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0_+).

6 Fonction dépendant d'un paramètre III

Soit, pour t réel > 0,

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x}\, e^{-tx}\, dx.$$

Montrer que $F(t)$ est fini pour tout $t > 0$, que F est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $F(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Calculer explicitement $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$.

7 Fonction dépendant d'un paramètre IV

Soit, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1 + t^2} dt.$$

Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$ et que $F(x) \to 0$ si $x \to +\infty$; calculer $F(0)$.

Montrer aussi que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et trouver une équation différentielle satisfaite par F sur cet intervalle. Intégrer cette équation en posant d'abord $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$, puis retrouver la valeur de I en utilisant les valeurs connues de $F(x)$.