TD 1. Intégration et Probabilités

1 Images réciproques

Montrer qu'une union (resp. intersection) dénombrable d'images réciproques est l'image réciproque de l'union (resp. intersection). Même question pour les complémentaires. Quant est il pour les images directes ?

2 Indicatrices

Soient A, B, C trois ensembles mesurables. Exprimer à l'aide des opérations sur les ensembles, les événements suivants et calculer leurs indicatrices en fonction de celles de A, B, C :
"A est réalisé seul."
"A et B sont réalisés mais pas C."
"Un des trois événements est réalisé."
"Deux événements au plus sont réalisés."
"aucun événement n'est réalisé."

3 $\underline{\lim}$

Soit (A_n) une suite d'événements, écrire à l'aide des opérations $\cup$ et $\cap$ l'événement suivant

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \text{"tous les } A_n \text{à partir d'un certain rang se produisent."}$$

Calculer l'indicatrice de $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ en fonction de celles des A_n.

4 Mesurabilité

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables. Prouver que $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ et $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ sont aussi mesurables.

5 Fonctions mesurables

– Montrer qu'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable.

– Soient $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Pour $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{A}' = \{\Omega', \emptyset\}$ quelles sont les fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega', \mathcal{A}')$ et réciproquement.