Examen Partiel de Probabilités et Statistique du 10 Mars 2014
Durée : 4h

Les calculatrices sont autorisées

1 Modèle exponentiel sur le tore

On considère des variables $X_1, \cdots, X_n$ de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$) :

$$f_{\theta^*}(x) := \frac{1}{Z(\theta^*)} \exp(\theta^* \cos(x)) \mathbf{1}_{[0,2\pi[}(x), \ (\theta^* \in \mathbb{R}),$$

où

$$Z(\theta^*) := \int_0^{2\pi} \exp(\theta^* \cos(x)) dx.$$

1. Montrer que le modèle est bien un modèle dominé.
2. Ecrire la vraisemblance. Déterminer une statistique exhaustive. Est-elle complète ?
3. Calculer l'information de Fisher du modèle.
4. On souhaite estimer la fonction $\varphi(\theta^*) := \int_0^{2\pi} \cos(x) f_{\theta^*}(x) dx$. Déterminer l'estimateur UVMB de $\varphi(\theta^*)$. Cet estimateur est-il efficace ?

2 Chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

On considère le groupe additif $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$. C'est-à-dire le groupe commutatif à 3 éléments $\{0, 1, 2\}$ avec $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $0 + 2 = 2$, $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 0$ et $2 + 2 = 1$. Pour $x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on note $x + x = 2x$ et si $y = 2x$ on note $x = y/2$.. Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Pour $x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on note $\mathbb{P}(\varepsilon_0 = x) = \theta_x$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le processus autorégressif défini par

$$X_0 = \varepsilon_0 \text{ et pour } n \in \mathbb{N}, \ X_{n+1} = \frac{1}{2} X_n + \varepsilon_{n+1}.$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irreductible sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
2. Montrer que la probabilité invariante de la chaîne ne dṕend pas de la loi de la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On observe $X_1, \ldots, X_n$ et l'on note S_n la fraction du temps passée en x. Que peut-on dire de S_n quand n tend vers l'infini. On note T_x le temps de retour en x de la chaîne (X_n) sachant que $X_0 = x$. Calculer $\mathbb{E}[T_x]$.
4. On pose $W_n := n^{-1} \sum_{j=1}^n \cos(2\pi X_j/3)$. Montrer que W_n converge presque sûrement vers une limite ξ que l'on déterminera.
5. Montrer que $\sqrt{n}(W_n - \xi)$ converge en loi vers une loi limite possédant un variance σ^2. Pour quelles valeurs de $(\theta_x)_{x\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$ cette variance est-elle maximum ?

3 Comparaisons d'inégalités de concentration dans le modèle de Poisson

On considère $X_1, \cdots, X_n$ des variables i.i.d. de loi de Poisson de paramètre $\lambda^* > 0$. On se propose d'évaluer les performances de $\overline{X_n}$ pour estimer λ.

1. Montrer que, pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(\overline{X_n} \geq \lambda^* + \varepsilon) \leq 1 - \frac{\varepsilon}{\lambda^* + \varepsilon}. \tag{1}$$

   Cette inégalité est-elle utile pour mesurer les performances de $\overline{X_n}$?

2. Montrer que, pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - \lambda^*| \geq \varepsilon) \leq \frac{\lambda^*}{n\varepsilon}. \tag{2}$$

3. On se propose de montrer que, pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - \lambda^*| \geq \varepsilon) \leq \exp(-nh^*(\lambda^* + \varepsilon)) + \exp(-nh^*(\lambda^* - \varepsilon)), \tag{3}$$

   où, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$h^*(t) = \begin{cases} \lambda^*(\frac{t}{\lambda^*} \log \frac{t}{\lambda^*} - \frac{t}{\lambda^*} + 1) & \text{if } t \geq 0 \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}.$$

   (a) Montrer que pour t et ε strictement positifs on a

$$\mathbb{P}(\overline{X_n} \geq \lambda^* + \varepsilon) \leq [\mathbb{E}(\exp(tX_1))]^n \exp(-nt(\lambda^* + \varepsilon)). \tag{4}$$

   (b) Calculer, pour $t > 0$, $h(t) := \log \mathbb{E}(\exp(tX_1))$. Montrer que, pour $\tau > \lambda^*$,

$$\sup_{t>0}(t\tau - h(\tau)) = h^*(\tau).$$

   En déduire que

$$\mathbb{P}(\overline{X_n} \geq \lambda^* + \varepsilon) \leq \exp(-nh^*(\lambda^* + \varepsilon)),\ (\varepsilon > 0).$$

   (c) Reprendre les deux questions précédentes pour montrer que

$$\mathbb{P}(\overline{X_n} \leq \lambda^* - \varepsilon) \leq \exp(-nh^*(\lambda^* - \varepsilon)),\ (\varepsilon > 0).$$

   On considérera pour cela, pour $\tau < \lambda^*$, $\sup_{t<0}(t\tau - h(t))$.

   (d) Montrer l'inégalité (3).

4. On suppose que $\lambda^* = 1$ et $n = 100$. Comparer les inégalités (2) et (3) pour $\varepsilon = 0,1; 0,5; 1$. Conclusions ?