Examen de Probabilités et Statistique du 15 Mai 2014
Durée : 4h

Les calculatrices sont autorisées

1 Statistique

1.1 Régression polynômiale

Soient p et n deux entiers tels que $0 \leq p < n$. Pour tout $1 \leq j \leq n$ on pose $x_j = j - \frac{n+1}{2}$. On considère $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_p$ polynômes fixés tels que :

- degré$(\psi_i) = i,\ \forall 0 \leq i \leq p$
- $\sum_{j=1}^n \psi_i(x_j)\psi_k(x_j) = 0,\ \forall 0 \leq i \neq k \leq p$

On a en vue d'étudier le modèle de régression

$$Y_j = \sum_{i=0}^p \lambda_i \psi_i(x_j) + \varepsilon_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

où $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_p, \sigma^2$ sont des paramètres inconnus.

a) Estimer les paramètres de ce modèle.

b) Ecrire un test de niveau α de "$\lambda_p = 0$" contre "$\lambda_p \neq 0$".

Le revenu net par action de la compagnie Gillette pour les années 57 à 64 est le suivant :

Année (z_j)	:	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964
Revenu en \$ $(Y_j(\omega))$	:	0,93	0,99	1,11	1,33	1,52	1,60	1,47	1,33

On pose $x_j = z_j - 1960,5$ puis $\psi_0(x) = 1, \psi_1(x) = 2x$ et $\psi_2(x) = x^2 - 21/4$.

c) Vérifier brièvement que le choix ci-dessus de $x_j, \psi_0, \psi_1, \psi_2$ rentre dans le cadre décrit plus haut.

d) En supposant que $Y_j = \sum_{i=0}^2 \lambda_i \psi_i(x_j) + \varepsilon_j, \quad 1 \leq j \leq 8$ avec $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_8$ indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, estimer $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ et σ^2. Tester si $\lambda_2 = 0$.

e) Faire une prévision pour le revenu net par action en 1965.

N.B. Pour faciliter les calculs, on indique les valeurs numériques suivantes :
$\sum_j \psi_1^2(x_j) = \sum_j \psi_2^2(x_j) = 168$ $\sum_j Y_j^2(\omega) = 13,65$ $\sum_j \psi_0(x_j)Y_j(\omega) = 10,28$
$\sum_j \psi_1(x_j)Y_j(\omega) = 6,86$ $\sum_j \psi_2(x_j)Y_j(\omega) = -4,1$.

1.2 Loi multinomiale

Soit n et l deux entiers naturels non nuls, on considère $N := (N_i)_{i=1\ldots,l}$ un vecteur aléatoire de loi multinomiale de paramètre n et p^* où $p^* := (p_i^*)_{i=1\ldots,l}$ avec $p_i^* > 0,\ i = 1, \ldots, l$ et $\sum_{i=1}^l p_i^* = 1$.

1. Ecrire la log-vraisemblance $l_n(p)$ du modèle. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de p^* est $\widehat{p} = \frac{N}{n}$.

2. A partir de maintenant, on suppose que $l = 2r$ ($r \in \mathbb{N}_*$). On suppose que $p^*_{2i} = 2p^*_i,\ i = 1\dots,r$. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\widehat{p}}$ de p^*.
3. Toujours sous l'hypothèse $p^*_{2i} = 2p^*_i,\ i = 1\dots,r$, déterminer la distribution asymptotique de
$$T := \sum_{i=1}^{2r} \frac{(N_i - n\widehat{\widehat{p}}_i)^2}{n\widehat{\widehat{p}}_i}.$$
4. Expliquer comment tester l'hypothèse H_0 $p^*_{2i} = 2p^*_i,\ i = 1\dots,r$. On suppose $r = 2$ et $n = 100$. On a observé $N_1^{\text{obs}} = 17,\ N_2^{\text{obs}} = 20,\ N_3^{\text{obs}} = 30,\ N_4^{\text{obs}} = 33$. Que décide t-on ?

2 Chaîne de Markov

2.1 Chaîne de Markov à k états

Soit (X_n) une chaîne de Markov d'ensemble d'états E fini stationnaire de transition P. On pose :
$$Q = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P^j$$

1. On suppose qu'il existe $\omega \geq 1$ tel que $P^{n+\omega} = P^n$ pour $n \geq 1$; montrer que
$$Q = \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^{\omega} P^j.$$
2. On suppose P primitive, c'est-à-dire qu'il existe $r \geq 1$ tel que $p_{ij}^{(r)} > 0,\ \forall i, j$. Montrer alors les propriétés suivantes (faire d'abord $r = 1$) :
   (a) Si $Px = x,\ x \in \mathbb{R}^k,\ x \neq 0$ alors il existe x_1 tel que $x = x_1 e$ avec $e = (1, \dots, 1)^T$.
   (b) Si $(P - I)^2 x = 0$ alors $(P - I)x = 0$ (on écrira $P = I + R$ et $P^n x = x + nRx$). En déduire que l'espace caractéristique associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par e.
   (c) Si λ est une valeur propre de P telle que $\lambda \neq 1$, alors $|\lambda| < 1$.
   (d) En déduire que P^n converge, à vitesse exponentielle vers Q, et que Q a toutes ses lignes égales, à coefficients strictement positifs.

2.2 File d'attente $G/G/1$

Des clients arrivent à une caisse de magasin. L'intervalle de temps entre l'arrivée du n-ème client et du $(n+1)$-ème client est une v.a. A_n. Le temps de service du n-ème client est une v.a. B_n. Les v.a. (A_n) (resp. (B_n)) sont supposées de même loi, et toutes ces v.a. sont supposées indépendantes entre elles. Soit W_n le temps d'attente du n-ème client.
1) Trouver une relation entre W_{n+1}, W_n, A_n et B_n. Montrer que (W_n) est une chaîne de Markov. Donner la transition de la chaîne.
2) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}(B_k - A_k)$ et $I = \inf S_n$. Montrer que $P(I = -\infty)$ vaut 0 ou 1 suivant que 0 est récurrent ou transitoire pour la chaîne (W_n), (Etablir en premier lieu que $W_{n+1} = S_n - \inf_{0\leq p\leq n} S_p\ S_0 = 0$).

Table de la loi de Fisher

0,95

La table donne les valeurs des fractiles d'une loi de Fisher à (n_1, n_2) degrés de liberté pour une probabilité 0,95 i.e. les valeurs u telles que $P(X \leq u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(x)dx = 0,95$ où X suit une loi de Fisher à (n_1, n_2) degrés de liberté, dont on rappelle ici l'expression de la densité :

$$f_X(x) = \frac{\Gamma[(n_1+n_2)/2]}{\Gamma(n_1/2)\ \Gamma(n_2/2)} \cdot \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2} \cdot \frac{x^{(n_1-2)/2}}{(1+n_1\ x/n_2)^{(n_1+n_2)/2}}.$$

La table donne donc les valeurs $F^{-1}_{n_1,n_2}(0,95)$ où $F^{-1}_{n_1,n_2}$ est la fonction réciproque de la fonction de répartition d'une Fisher à (n_1, n_2) degrés de liberté. Par exemple, $F^{-1}_{10,20}(0,95) = 2,35$. Remarque : $F^{-1}_{n_1,n_2}(\nu) = 1/F^{-1}_{n_2,n_1}(1-\nu)$.
Avec Excel, on utilise la fonction =INVERSE.LOI.F(1-ν; n_1; n_2) pour obtenir $F^{-1}_{n_1,n_2}(\nu)$.
Avec R, la fonction : `qf`(ν, n_1, n_2) donne la valeur cherchée.

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.90	245.36
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.42
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.71
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.87
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.64
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.96
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.53
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.24
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.03
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.86
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.74
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.64
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.55
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.48
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.42
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.37
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.33
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.29
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.26
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.22
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.20
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.17
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.15
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.13
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.11
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.09
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.08
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.06
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.05
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.04
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	2.07	2.01
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.05	1.99
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	2.03	1.98
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.02	1.96
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.95
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.95	1.89
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.86
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.89	1.84
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.88	1.82
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.86	1.80
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.85	1.79
∞	3.84	3.00	2.61	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.69

Loi de Khi-deux

Le tableau donne **x** tel que **P(K > x) = p**

p	0,999	0,995	0,99	0,98	0,95	0,9	0,8	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,001
ddl														
1	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0039	0,0158	0,0642	1,6424	2,7055	3,8415	5,4119	6,6349	7,8794	10,8276
2	0,0020	0,0100	0,0201	0,0404	0,1026	0,2107	0,4463	3,2189	4,6052	5,9915	7,8240	9,2103	10,5966	13,8155
3	0,0243	0,0717	0,1148	0,1848	0,3518	0,5844	1,0052	4,6416	6,2514	7,8147	9,8374	11,3449	12,8382	16,2662
4	0,0908	0,2070	0,2971	0,4294	0,7107	1,0636	1,6488	5,9886	7,7794	9,4877	11,6678	13,2767	14,8603	18,4668
5	0,2102	0,4117	0,5543	0,7519	1,1455	1,6103	2,3425	7,2893	9,2364	11,0705	13,3882	15,0863	16,7496	20,5150
6	0,3811	0,6757	0,8721	1,1344	1,6354	2,2041	3,0701	8,5581	10,6446	12,5916	15,0332	16,8119	18,5476	22,4577
7	0,5985	0,9893	1,2390	1,5643	2,1673	2,8331	3,8223	9,8032	12,0170	14,0671	16,6224	18,4753	20,2777	24,3219
8	0,8571	1,3444	1,6465	2,0325	2,7326	3,4895	4,5936	11,0301	13,3616	15,5073	18,1682	20,0902	21,9550	26,1245
9	1,1519	1,7349	2,0879	2,5324	3,3251	4,1682	5,3801	12,2421	14,6837	16,9190	19,6790	21,6660	23,5894	27,8772
10	1,4787	2,1559	2,5582	3,0591	3,9403	4,8652	6,1791	13,4420	15,9872	18,3070	21,1608	23,2093	25,1882	29,5883
11	1,8339	2,6032	3,0535	3,6087	4,5748	5,5778	6,9887	14,6314	17,2750	19,6751	22,6179	24,7250	26,7568	31,2641
12	2,2142	3,0738	3,5706	4,1783	5,2260	6,3038	7,8073	15,8120	18,5493	21,0261	24,0540	26,2170	28,2995	32,9095
13	2,6172	3,5650	4,1069	4,7654	5,8919	7,0415	8,6339	16,9848	19,8119	22,3620	25,4715	27,6882	29,8195	34,5282
14	3,0407	4,0747	4,6604	5,3682	6,5706	7,7895	9,4673	18,1508	21,0641	23,6848	26,8728	29,1412	31,3193	36,1233
15	3,4827	4,6009	5,2293	5,9849	7,2609	8,5468	10,3070	19,3107	22,3071	24,9958	28,2595	30,5779	32,8013	37,6973
16	3,9416	5,1422	5,8122	6,6142	7,9616	9,3122	11,1521	20,4651	23,5418	26,2962	29,6332	31,9999	34,2672	39,2524
17	4,4161	5,6972	6,4078	7,2550	8,6718	10,0852	12,0023	21,6146	24,7690	27,5871	30,9950	33,4087	35,7185	40,7902
18	4,9048	6,2648	7,0149	7,9062	9,3905	10,8649	12,8570	22,7595	25,9894	28,8693	32,3462	34,8053	37,1565	42,3124
19	5,4068	6,8440	7,6327	8,5670	10,1170	11,6509	13,7158	23,9004	27,2036	30,1435	33,6874	36,1909	38,5823	43,8202
20	5,9210	7,4338	8,2604	9,2367	10,8508	12,4426	14,5784	25,0375	28,4120	31,4104	35,0196	37,5662	39,9968	45,3147
21	6,4467	8,0337	8,8972	9,9146	11,5913	13,2396	15,4446	26,1711	29,6151	32,6706	36,3434	38,9322	41,4011	46,7970
22	6,9830	8,6427	9,5425	10,6000	12,3380	14,0415	16,3140	27,3015	30,8133	33,9244	37,6595	40,2894	42,7957	48,2679
23	7,5292	9,2604	10,1957	11,2926	13,0905	14,8480	17,1865	28,4288	32,0069	35,1725	38,9683	41,6384	44,1813	49,7282
24	8,0849	9,8862	10,8564	11,9918	13,8484	15,6587	18,0618	29,5533	33,1962	36,4150	40,2704	42,9798	45,5585	51,1786
25	8,6493	10,5197	11,5240	12,6973	14,6114	16,4734	18,9398	30,6752	34,3816	37,6525	41,5661	44,3141	46,9279	52,6197
26	9,2221	11,1602	12,1981	13,4086	15,3792	17,2919	19,8202	31,7946	35,5632	38,8851	42,8558	45,6417	48,2899	54,0520
27	9,8028	11,8076	12,8785	14,1254	16,1514	18,1139	20,7030	32,9117	36,7412	40,1133	44,1400	46,9629	49,6449	55,4760
28	10,3909	12,4613	13,5647	14,8475	16,9279	18,9392	21,5880	34,0266	37,9159	41,3371	45,4188	48,2782	50,9934	56,8923
29	10,9861	13,1211	14,2565	15,5745	17,7084	19,7677	22,4751	35,1394	39,0875	42,5570	46,6927	49,5879	52,3356	58,3012
30	11,5880	13,7867	14,9535	16,3062	18,4927	20,5992	23,3641	36,2502	40,2560	43,7730	47,9618	50,8922	53,6720	59,7031
40	17,9164	20,7065	22,1643	23,8376	26,5093	29,0505	32,3450	47,2685	51,8051	55,7585	60,4361	63,6907	66,7660	73,4020
50	24,6739	27,9907	29,7067	31,6639	34,7643	37,6886	41,4492	58,1638	63,1671	67,5048	72,6133	76,1539	79,4900	86,6608
60	31,7383	35,5345	37,4849	39,6994	43,1880	46,4589	50,6406	68,9721	74,3970	79,0819	84,5799	88,3794	91,9517	99,6072
70	39,0364	43,2752	45,4417	47,8934	51,7393	55,3289	59,8978	79,7146	85,5270	90,5312	96,3875	100,4252	104,2149	112,3169
80	46,5199	51,1719	53,5401	56,2128	60,3915	64,2778	69,2069	90,4053	96,5782	101,8795	108,0693	112,3288	116,3211	124,8392
90	54,1552	59,1963	61,7541	64,6347	69,1260	73,2911	78,5584	101,0537	107,5650	113,1453	119,6485	124,1163	128,2989	137,2084
100	61,9179	67,3276	70,0649	73,1422	77,9295	82,3581	87,9453	111,6667	118,4980	124,3421	131,1417	135,8067	140,1695	149,4493
120	77,7551	83,8516	86,9233	90,3667	95,7046	100,6236	106,8056	132,8063	140,2326	146,5674	153,9182	158,9502	163,6482	173,6174
140	93,9256	100,6548	104,0344	107,8149	113,6593	119,0293	125,7581	153,8537	161,8270	168,6130	176,4709	181,8403	186,8468	197,4508
160	110,3603	117,6793	121,3456	125,4400	131,7561	137,5457	144,7834	174,8283	183,3106	190,5165	198,8464	204,5301	209,8239	221,0190
180	127,0111	134,8844	138,8204	143,2096	149,9688	156,1526	163,8682	195,7434	204,7037	212,3039	221,0772	227,0561	232,6198	244,3705
200	143,8428	152,2410	156,4320	161,1003	168,2786	174,8353	183,0028	216,6088	226,0210	233,9943	243,1869	249,4451	255,2642	267,5405
250	186,5541	196,1606	200,9386	206,2490	214,3916	221,8059	231,0128	268,5986	279,0504	287,8815	298,0388	304,9396	311,3462	324,8324
300	229,9634	240,6634	245,9725	251,8637	260,8781	269,0679	279,2143	320,3971	331,7885	341,3951	352,4246	359,9064	366,8444	381,4252
400	318,2596	330,9028	337,1553	344,0781	354,6410	364,2074	376,0218	423,5895	436,6490	447,6325	460,2108	468,7245	476,6064	493,1318
500	407,9470	422,3034	429,3875	437,2194	449,1468	459,9261	473,2099	526,4014	540,9303	553,1268	567,0698	576,4928	585,2066	603,4460
600	498,6229	514,5289	522,3651	531,0191	544,1801	556,0560	570,6680	628,9433	644,8004	658,0936	673,2703	683,5156	692,9816	712,7712
700	590,0480	607,3795	615,9075	625,3175	639,6130	652,4973	668,3308	731,2805	748,3591	762,6607	778,9721	789,9735	800,1314	821,3468
800	682,0665	700,7250	709,8969	720,0107	735,3623	749,1852	766,1555	833,4557	851,6712	866,9114	884,2789	895,9843	906,7862	929,3289
900	774,5698	794,4750	804,2517	815,0267	831,3702	846,0746	864,1125	935,4987	954,7819	970,9036	989,2631	1001,6296	1013,0364	1036,8260