L2 Parcours spécial 2013-2014 Université Paul Sabatier
Approfondissement mathématiques

Interrogation écrite du 16 avril 2014-Durée 30 minutes

Pour $N \in \mathbb{N}$, On considère une collection de variables aléatoires indépendantes $(X_{ij})_{i=1\dots N, j=1,2}$ toutes de la loi gaussienne standard. On pose

$$A_N := \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ \vdots & \vdots \\ X_{N1} & X_{N2} \end{pmatrix}.$$

1. Combien A_N compte t'elle presque sûrement de valeurs singulières (on rappelle que les valeurs singulières sont strictement positives). On appelle r cet entier naturel.
2. Soit S_N la somme des carrés des r valeurs singulières de A_N et P_N leur produit. Calculer S_N et P_N.
3. Montrer que, lorsque N tend vers $+\infty$, S_N converge presque sûrement vers 2 et P_N vers 1. En déduire les limites presque sûres des valeurs singulières.