

Interrogation écrite du 19 mars 2014-Durée 30 minutes

On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 8 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que -3 est une valeur propre de A . Donner un vecteur propre associé.
2. Que valent la trace et le déterminant de A . En déduire le polynôme caractéristique de A . Donner la seconde valeur propre de A ainsi qu'un vecteur propre associé.
3. Déterminer la réduite de Jordan de A . En déduire des matrices 3×3 , D , N et P , où D est une matrice diagonale, N est une matrice nilpotente et P est une matrice inversible telles que $A = P^{-1}(D + N)P$.
4. Calculer, pour tout t de \mathbb{R} la matrice $\exp(tA)$.
5. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$