L2 Parcours spécial 2013-2014 Université Paul Sabatier
Approfondissement mathématiques

Examen du 15 mai 2014-Durée 2h

1 Valeurs singulières des matrices Hadamard de Sylvester

Soit $H_0 := 1$. Pour $n \geq 1$, on pose $N = 2^n$ et

$$H_n := \begin{pmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } S_n := \frac{1}{\sqrt{N}} H_n$$

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.
2. Soit $n \geq 1$, pour $i, j = 1, \cdots, N$, on note s_n^{ij} l'élément de la ligne i, colonne j de S_n et $\underline{s}_n^j$ la colonne j de S_n . Quel est l'ensemble des valeurs possible de s_n^{ij} ? Que vaut $\|\underline{s}_n^j\|_2$ (norme euclidienne standard).
3. Montrer par récurrence que la matrice S_n satisfait l'équation $S_n^T S_n = I_N$, où I_N désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^N$. Que vaut $|\det S_n|$?
4. Quelles sont les valeurs singulières de S_n ? Donner la décomposition en valeurs singulières de S_n.

2 Un peu de probabilités

2.1 Spectre d'une certaine matrice de Toeplitz

Pour $n \geq 1$, on considère la marice de Toeplitz $n \times n$

$$T_n := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ -0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Soit, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $P_n(\lambda)$ le polynôme caractéristique de T_n.

1. Montrer que $P_1(\lambda) = -\lambda$, $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 1$.
2. Montrer que $P_n(\lambda)$ satisfait la récurrence
$$P_n(\lambda) = -\lambda P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda), \quad (n \geq 3). \tag{1}$$
3. Montrer, par récurrence sur n, que pout tout $x \in \mathbb{R}$,
$$P_n(-2\cos x) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin(x)}.$$
4. Quelle sont les valeurs propres de T_n.

2.2 Forme quadratique gaussienne

Soit (ε_n) une suite i.i.d. de loi gaussienne standard. On considère la forme quadratique aléatoire $W_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \varepsilon_{i+1}$.

1. En utilisant la partie 2.1 et le théorème de Cochran, montrer que W_n peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\chi^2(1)$ et pondérées par les valeurs propres de T_n.
2. Calculer l'espérance et la variance de W_n. Montrer que ces quantités convergent toutes les deux vers 0. Quelle est la limite, quand n tend vers $+\infty$ de $n\mathrm{Var}W_n$?
3. En déduire que la suite (W_n) converge en probabilité vers une limite non aléatoire à préciser.