MAF 2012-2013

Probabilités et Statistique

Partiel du 4 mars 2013

Exercice

Pour $\theta \in [0,1]$, on considère la chaîne de Markov sur $E = \{1,2,3\}$ d'état initial $X_0 = 1$ et de matrice de transition

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\theta}{2} & \frac{1}{2}(1-\theta) \\ \theta & 1-\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Discuter suivant la valeur de θ de la nature des états et de la chaîne.
2) On suppose que $\theta = 1$. Calculer $\mathbb{P}_1(X_4 = 1)$.
3) On suppose que $\theta = 0.5$. Que vaut la limite presque sûre de $n^{-1}\sum_{j=1}^{n} X_j$?

Problème

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de densité :

$$f(x) = C_{\alpha^*,\beta^*} x^{\frac{1}{\alpha^*}-1}\mathbf{1}_{[0,\beta^*]}(x), \quad \alpha^*, \beta^* > 0.$$

1) Calculer la constante C_{α^*,β^*}.
2) Pour $\alpha, \beta > 0$, calculer la fonction de vraisemblance associée aux observations $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{R}^+$. Montrer que la fonction log-vraisemblance est :

$$\begin{aligned} l_n(\alpha,\beta;X_1,\ldots,X_n) &= -n\log\alpha - \frac{n}{\alpha}\log\beta + (\frac{1}{\alpha}-1)\sum_{i=1}^{n}\log X_i \quad \text{si } \beta \geq \max_{i=1\ldots n} X_i, \\ &= -\infty \quad \text{si } \beta < \max_{i=1\ldots n} X_i. \end{aligned}$$

3) On suppose que α^* est connu et β^* inconnu.
   a) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\beta}_n$ de β^*.
   b) Montrer que $\widehat{\beta}_n$ a pour densité :

$$g_n(t) = \frac{n}{\alpha^*\beta^*}\left(\frac{t}{\beta^*}\right)^{\frac{n}{\alpha^*}-1}\mathbf{1}_{[0,\beta^*]}(t).$$

   $\widehat{\beta}_n$ est-il sans biais ?
   c) Montrer que pour $t > \beta^*$ on a $P(|\widehat{\beta}_n - \beta^*| \geq t) = 0$. Tandis que pour $t \in [0, \beta^*]$:

$$P(|\widehat{\beta}_n - \beta^*| \geq t) = P(0 \leq \widehat{\beta}_n \leq \beta^* - t) = \left(1 - \frac{t}{\beta^*}\right)^{\frac{n}{\alpha^*}}.$$

   En déduire que $\widehat{\beta}_n$ est un estimateur faiblement consistant.

d) Montrer, en utilisant c) que $n(\beta^* - \widehat{\beta}_n)$ converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\alpha^*\beta^*}$.

e) On suppose que $\alpha^* = \frac{1}{2}$ pour $n = 100$ et $(\max_{i=1\ldots n} X_i)^{\text{observé}} = 10$. Donner un intervalle de confiance asymptotique à 5% pour β^*. Indication : calculer la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\alpha^*\beta^*}$.

4) On suppose maintenant que β^* est connu et α^* inconnu.

a) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\alpha}_n$ de α^*.

b) $\widehat{\alpha}_n$ est-il biaisé ?

c) Montrer que $\widehat{\alpha}_n$ est un estimateur consistant.

d) Calculer $\sigma^2 = \text{var}\,(\log X_1)$ et déterminer la loi limite de

$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{\alpha}_n - \alpha^*)}{\sigma}.$$

e) On suppose que $\beta^* = 1$ et $n = 100$, on a observé $(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} \log X_i)^{\text{obs}} = -15$. Donner un intervalle de confiance asymptotique à 5% pour α^*.

5) On suppose maintenat que α^* et β^* sont inconnus.

a) En utilisant les questions 3.a) et 4.a), montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de (α^*, β^*) est

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{\beta}}_n &= \max_{i=1\ldots n} X_i \\ \widehat{\widehat{\alpha}}_n &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log \frac{X_i}{\widehat{\widehat{\beta}}_n}. \end{aligned}$$

b) En exprimant $\widehat{\widehat{\beta}}_n$ et $\widehat{\widehat{\alpha}}_n$ en fonction de $\widehat{\beta}_n$ et $\widehat{\alpha}_n$, montrer que $\widehat{\widehat{\alpha}}_n$ et $\widehat{\widehat{\beta}}_n$ sont des estimateurs biaisés.

c) Montrer que $\widehat{\widehat{\alpha}}_n$ $\widehat{\widehat{\beta}}_n$ sont des estimateurs faiblement consistants.