TD 2

Probabilités et Statistique

MAF 2012-2013

1 Problème

Soit X une variable aléatoire de densité

$$f_a(x) = C\cos^2\left(2\pi(x-a)\right)\mathbf{1}_{[a,a+1]}(x), \quad (a \in \mathbb{R}).$$

a) Montrer que $X - a$ a pour densité f_0. En déduire la valeur de C ainsi que l'espérance et la variance de X.

b) Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de même loi que X. Construire, à partir de la moyenne empirique de l'échantillon, un estimateur sans biais $\widehat{a}$ de a. Montrer que cet estimateur est fortement consistant. Construire, pour les grandes valeurs de n, un intervalle de confiance pour a de risque α ($\alpha \in [0,1]$).

c) On propose maintenant pour estimer a les estimateurs $\widehat{\widehat{a}} = \min_{i=1\ldots n} X_i$ et $\widehat{\widehat{\widehat{a}}} = \max_{i=1\ldots n} X_i - 1$. Sans faire de calcul, montrer que ces estimateurs sont biaisés.

d) Calculer la fonction de répartition de de $\widehat{\widehat{a}}$ et en déduire sa densité. Montrer que $\widehat{\widehat{a}}$ est faiblement consistant.

e) Montrer que $n(\widehat{\widehat{a}} - a)$ converge en loi vers une limite à préciser. Indication : calculer d'abord la fonction de répartition de $n(\widehat{\widehat{a}} - a)$.
En déduire alors un intervalle de confiance au risque α pour a. Comparer avec les résultats de la question b), conclusions ?

2 Loi log-normale

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires réelles positives, indépendantes de même loi, telle que $\log X_i$ soit distribué selon une loi normale de moyenne θ^* réel inconnu, et de variance 1.

a) Montrer que $\sum_{i=1}^n \log X_i$ est une statistique exhaustive complète et minimale.

b) Donner un estimateur sans biais de variance minimale de θ^*.

c) Proposer un estimateur sans biais de e^{θ^*}.

3 Bernoulli

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de loi de Bernoulli de paramètre $\log\theta$ ($\theta \in]1, e[$).

a) Calculer l'estimateur $\widehat{\theta}$ du maximum de vraisemblance de θ. Indication : ne pas dériver la vraisemblance mais utiliser le caractère bijectif de la fonction log.

b) Montrer que cet estimateur est fortement consistant.

c) Soit $x, y \in [0,1]$, montrer qu'il existe un réel $0 \leq \xi \leq 1$ tel que :

$$\exp(x) - \exp(y) = \exp(y)(x-y) + \exp(\xi)\frac{(x-y)^2}{2}. \tag{1}$$

En déduire que l'on a

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta) = \theta\sqrt{n}(\overline{X}_n - \log\theta) + A_n, \tag{2}$$

où $\overline{X}_n$ est la moyenne empirique de l'échantillon et (A_n) une suite de variables aléatoires à préciser. Montrer que presque sûrement $|A_n| \leq e\sqrt{n}(\overline{X}_n - \log\theta)^2$ et en déduire que A_n converge en probabilité vers 0. Montrer le résultat suivant : soit (U_n) et (V_n) des suites de variables aléatoires. On suppose que (U_n) converge en loi vers U et que (V_n) converge en probabilité vers 0. Alors, $(U_n + V_n)$ converge en loi vers U. Montrer que $\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta)$ converge en loi vers une limite à préciser.

4 Estimation d'une probabilité de panne

Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite indépendante de temps de panne, supposés distribués selon une loi exponentielle de paramètre θ, $\theta > 0$.

a) Montrer que $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est une statistique exhaustive complète et minimale.

b) Montrer, par récurrence, que Y_n suit la loi d'Erlang de densité :

$$f_n(y) = \theta^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\theta y) \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(y).$$

En déduire la loi du couple $(X_1, \sum_{i=2}^n X_i)$, puis celle du couple $(X_1, \sum_{i=1}^n X_i)$.

c) En utilisant les questions précédentes, trouver un estimateur sans biais de variance minimale de la probabilité de panne après l'instant t, $t > 0$ fixé.