Master 2 IMAT

Examen de Plans d'expérience du 17 Janvier 2013
Durée : 2h, 10h-12h

Notes de cours autorisées.
Les résultats seront être justifiés. Les calculatrices sont autorisées

1 Plan D-optimal pour la régression linéaire

On considère un modèle de régression linéaire simple

$$Y_i = \mu + \beta Z_i + \varepsilon_i \quad ; \quad i = 1, \cdots, n$$

ou la variable Z varie dans l'intervalle $[0, 1]$. On cherche un plan avec un nombre d'observations n pair.

1. Calculez la matrice d'information $X^T X$ et montrez que son determinant Δ vérifie :

$$\Delta = n \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} Z_i)^2$$

2. On suppose que l'un des Z_i (Z_1 sans perte de généralité) est plus grand que $\overline{Z}$ et strictement plus petit que 1. Montrer que le plan où l'on remplace Z_1 par 1 a un plus grand Δ que le plan de départ.
3. En déduire qu'un plan D-optimal a forcément des régresseurs Z_i qui ne prennent que les valeurs 0 ou 1.
4. Monter qu'un plan optimal correspond à $n/2$ fois 0 et $n/2$ fois 1 pour les Z_i .

2 Plans pour surfaces de réponse

Pour bien fixer le vocabulaire nous précisons que dans le modèle linéaire

$$Y = X\theta + \varepsilon,$$

X est appelée *matrice d'incidence*, et que $X^T X$ est appelé *matrice d'information.*

Soit Y une variable à expliquer dépendant de deux variables quantitatives Z et T à valeurs réelles. On suppose que la dépendance est quadratique

$$Y = \alpha_{00} + \alpha_{10} Z + \alpha_{01} T + \alpha_{20} Z^2 + \alpha_{02} T^2 + \alpha_{11} ZT + \varepsilon \tag{1}$$

avec les hypothèses habituelles sur les erreurs ε. On réalise une expérience qui consiste en n unités

$$\big(Z_1, T_1\big), \cdots, \big(Z_n, T_n\big)$$

1. Écrire la matrice d'incidence du modèle (1).

2. On pose $[j,k] := \sum_{i=1}^{n} Z^j T^k$, $j,k = 0,4$.
   En utilisant cette notation donner par exemple les deux premières lignes de la matrice d'information.

3. On cherche un plan **isovariant**, c'est-à-dire tel que la précision d'estimation de la réponse soit invariante par rotation. Plus précisément, on veut que pour tout $\rho > 0$

$$\operatorname{Var}\Big(\hat{Y}(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)\Big) \text{ ne dépend pas de } \theta.$$

   Montrer que cette propriété est équivalente à l'invariance par rotation de la matrice d'information. Cette dernière propriété revient a demander que

$$\big(Z_1, T_1\big), ..., \big(Z_n, T_n\big)$$

   et

$$\big(Z_1\cos(\theta) - T_1\sin(\theta), Z_1\sin(\theta) + T_1\cos(\theta)\big), ..., \big(Z_n\cos(\theta) - T_n\sin(\theta), Z_n\sin(\theta) + T_n\cos(\theta)\big)$$

   conduisent à la même matrice d'information. (Donner un argument général sans détailler).

4. Montrer que si l'on a
   a) $[j,k] = 0$ dès i ou j est impair,
   b) $[2,0] = [0,2](= \mu_2)$,
   c) $[4,0] = [0,4] = 3[2,2](= 3\mu_4)$,
   alors le plan est isovariant.
   La démonstration étant fastidieuse on se limitera à $[0,0], [1,0], [2,0], [4,0], [2,2]$

5. Soit le plan *cubique face centrée* suivant :

Z	T
+1	+1
+1	-1
-1	+1
-1	-1
0	$\sqrt{2}$
0	$-\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$	0
$-\sqrt{2}$	0
0	0

   Monter qu'il vérifie bien les conditions a), b), c) ci-dessus.