Partiel du 6 mars 2013-De 10h30 à 12h30

Décomposition d'un endomorphisme et application

Soit n un entier naturel non nul. Sur $\mathbb{R}^n$, on note $(e_j^n)_{j=1,\dots,n}$ la base canonique et $\mathbf{1}_n$ désigne le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes valent 1. $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne habituelle. Dans toute l'épreuve on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on considère l'endomorphisme v de $\mathbb{R}^3$ tel que $v(e_1^3) = v(e_2^3) = 0$ et $v(e_3^3) = e_2^3$ et l'on appelle B sa matrice dans la base canonique. C désigne la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Sp}(e_3^3)$ écrite dans la base canonique.

Diagonalisation et décomposition de Jordan

1. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont écrits dans l'ordre croissant telles que $A = PDP^{-1}$. Déterminer les polynômes caractéristique et minimal associés à u.
2. Ecrire les matrices B et C. Montrer que $A - PCP^{-1}$ et PBP^{-1} commutent.
3. Expliciter la décomposition de Jordan de $A_1 := A + P(B - C)P^{-1}$. Déterminer les polynômes caractéristique et minimal associés à la matrice A_1.

Décomposition QR

Déterminer une isométrie Q_2 de $\mathbb{R}^2$ avec $Q_2\mathbf{1}_2 = \sqrt{2}e_1^2$. En déduire une isométrie Q_3 de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$A = Q_3 \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

SVD

1. Montrer que A^TA possède 3 valeurs propres distinctes $s_1^2,\ s_2^2,\ s_3^2$ avec $0 \leq s_3 < s_2 < s_1$. Soit $\alpha_i,\ i = 1,2,3$ les vecteurs propres unitaires associés à $s_i^2,\ i = 1,2,3$ dont la première composante non nulle est strictement positive. Déterminer $\alpha_i,\ i = 1,2,3$.

Application

1. On considère la matrice $A_0 := 1/2A$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_0^n. En déduire la valeur de $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} A_0^n$.