Exercices de la semaine du 1er avril 2013

1 Courbes paramétrées

1. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, donner des équations paramétriques pour une droite ; un cercle ; une ellipse ; une hyperbole ; une parabole.
2. Pour chacune des courbes suivantes, déterminer la tangente en tout point, les points d'inflexion et de rebroussement, les branches infinies, les points doubles ; construire et tracer la courbe.
   (a) $x = \sin 4t, \quad y = \cos 3t$;
   (b) $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$;
   (c) $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$;
   (d) $x = \cos t, \quad y = \dfrac{\sin^2 t}{2 + \sin t}$;
   (e) $x = \dfrac{t^3}{1-t^2}, \quad y = \dfrac{1+t}{(1-t)^2}$;
   (f) $x = \cos^3 t + \sin t, \quad y = \sin^3 t + \cos t$;
   (g) $x = 3\cos t - 2\sin^3 t, \quad y = \cos 4t$.
3. On considère l'ensemble Γ des points du plan (x, y) qui vérifient $0 < x < 2$ et $x = 2\sin(y/x)$. Montrer que c'est un arc dont on trouvera une représentation paramétrique. Construire Γ.
4. On considère l'arc paramétré du plan défini par
$$x = \frac{t^2+1}{t^3-1}, \quad y = \frac{2t}{t^3-1}.$$
   Étudier ses branches infinies. Trouver ses points d'inflexion et montrer qu'ils sont alignés. Tracer l'arc.
5. Soit l'arc paramétré défini par
$$x = \frac{t - \sin t}{t^2}, \quad y = \frac{1 - \cos t}{t^2}.$$
   Montrer qu'il peut être prolongé continûment pour tout $t \in \mathbb{R}$ et qu'il possède un axe de symétrie. Montrer qu'il possède une infinité de points de rebroussement situés sur un même cercle, et que les tangentes en ces points sont concourantes. Tracer l'arc.
6. **Épicycloïdes, hypocycloïdes -** Soit $R > 0$ un réel, et C_R le cercle de centre O et de rayon R dans le plan.
   (a) On considère le cercle γ de rayon 1 tangent extérieurement à C_R en $A = (R, 0)$; on fait rouler γ le long de C_R sans glisser. Trouver des équations paramétriques de l'ensemble Γ_R des points occupés par A. Dans quels cas cet ensemble est-il un arc ? Sinon quel est-il ?
   (b) On suppose à présent que $R > 1$ et que γ est tangent intérieurement à C_R ; mêmes questions sur l'ensemble Γ'_R ainsi construit.
   (c) Tracer Γ_R et Γ'_R pour $R = 6$ et $R = 8/3$.

7. Montrer que les deux droites de l'espace d'équations paramétriques $x = 2 + 2t, y = 2 + 4t, z = 2 - 4t$ et $x = 4 + t, y = 6 + 2t, z = -2 - 2t$ sont identiques.
8. Montrer que la courbe de l'espace d'équations paramétriques
$$x = 4\sqrt{2}\cos t, \quad y = t + 2\sin t, \quad z = -2\cos t$$
est plane.
9. **Hélice -** Étudier la courbe paramétrée de l'espace définie par
$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t.$$
Tracer ses projections orthogonales sur les trois plans xOy, yOz, xOz. Montrer que la projection de cette courbe sur le plan xOy parallèlement à la direction d'une de ses tangentes est une cycloïde.
10. Trouver en tout point l'équation du plan osculateur à la courbe
$$x = \frac{t^3}{t^2+1}, \quad y = \frac{t^2}{t^2+1}, \quad z = \frac{t}{t^2+1}.$$
11. On considère l'arc de l'espace défini en coordonnées paramétriques par
$$M(t): \qquad x = t^3, \quad y = t^2, \quad z = t.$$
Déterminer l'intersection $\mu(t)$ de sa tangente en $M(t)$ avec le plan osculateur en $O = M(0)$, et montrer que la tangente à l'arc $t \mapsto \mu(t)$ n'est autre que l'intersection des plans osculateurs en O et en $M(t)$.
12. **Loxodromie de sphère -** On considère la courbe paramétrique de l'espace définie par
$$x = \cos(k \log \sin t) \sin t, \quad y = \sin(k \log \sin t) \sin t, \quad z = \cos t,$$
pour $0 < t < \pi$, où $k > 0$ est un réel fixé.
   (a) Montrer qu'elle est tracée sur une sphère de centre O, et qu'elle est symétrique par rapport à O. Montrer qu'elle possède deux points limites que l'on précisera.
   (b) Calculer sa tangente en tout point. Montrer qu'elle fait un angle constant avec les méridiens de la sphère, angle que l'on déterminera en fonction de k.
   (c) Tracer les projections de la courbe sur les trois plans xOy, yOz et xOz. Quelle est l'allure de cette courbe dans l'espace ?

2 Rotationnel et autres opérateurs sympathiques

1. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $\mathbf{U}$ un champ vectoriel arbitraire, $\mathbf{a}$ un vecteur constant, $\mathbf{r}$ le champ vectoriel de coordonnées (x, y, z) et $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Calculer $\Delta\frac{1}{r}$; $\mathrm{div}(\mathbf{r}/r^3)$; $\mathrm{div}(\mathbf{U} \wedge \mathbf{r})$; $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{U})$; $\mathrm{rot}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r})$.
2. Soit a, b, c des constantes et $\mathbf{U}$ le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées
$$(x + 2y + az,\ bx - 3y - z,\ 4x + cy + 2z).$$
Déterminer pour quelles valeurs de a, b, c, $\mathbf{U}$ est irrotationnel. Dans ce cas, de quel potentiel dérive-t-il ? Mêmes questions avec le champ de coordonnées
$$\left(\frac{xzr^2}{(ax^2+by^2+c)^{\frac{3}{2}}}, \frac{yzr^2}{(ax^2+by^2+c)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-r^2}{(ax^2+by^2+c)^{\frac{3}{2}}}\right),$$
où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

3. Un *champ électromagnétique* est caractérisé par deux champs de vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$, également fonctions du temps t, et satisfaisant les *équations de Maxwell*

$$\mathrm{div}\mathbf{H} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

   où c est une constante et ρ une fonction scalaire de (x, y, z, t). Montrer qu'il existe un champ de vecteurs $\mathbf{A}$ tel que $\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathbf{H}$, et un champ scalaire ϕ tel que $\mathbf{E}$ s'exprime en fonction de $\mathbf{A}$ et ϕ. Calculer $\mathrm{div}\mathbf{A}$ à l'aide de ϕ, et montrer que $\mathbf{A}$ et ϕ satisfont une équation des ondes.

3 Points critiques et extrema

1. Partager 120 en trois parties de telle sorte que la somme des produits pris deux à deux soit maximale.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que : $f(x, y) = xy \exp(-x^2 - y^2)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
   (a) Déterminer les points critiques de f.
   (b) Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ admet un maximum. Le déterminer. Est-il global ?
   (c) f admet-elle un minimum ou un maximum global sur $\mathbb{R}^2$?
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = y(y - x^2)$. Montrer que la restriction de f à chaque droite contenant 0 admet un minimum local strict en 0 mais que f n'a pas d'extremum en 0.
4. Étudier les extrémas de f sur son ensemble de définition.
   (a) $(x, y) \to f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,
   (b) $(x, y) \to f(x, y) = x((\ln x)^2 + y^2)$.