IUP SID
Analyse
2011-2012

Mardi 18 octobre 2011- Interrogation 2-Durée 1 heure

1 Convergence-Divergence

On considère la série dont le terme généréral est u_n, $n \geq 1$. Dans chacun des cas ci-dessous étudier la convergence de la série.

1. $u_n = \dfrac{1}{(4n+1)!}$, $n \geq 1$,
2. $u_n = \dfrac{n!}{(4n+1)!}$, $n \geq 1$,
3. $u_n = \dfrac{n^5+4}{n^6+1}$, $n \geq 1$,
4. $u_n = \dfrac{n^5+4}{n^7+n+1}$, $n \geq 1$,
5. $u_n = \dfrac{\cos(\log(\log(n)))}{n^{3/2}}$, $n \geq 2$.

2 Arigéo

Soit λ un nombre reél strictement positif et différent de 1. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_{n+1} = \lambda u_n + \frac{1}{2}, \quad n \geq 1, \quad u_0 = 0. \tag{1}$$

1. Montrer par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{1-\lambda^n}{2(1-\lambda)}.$$
2. Pour quelles valeurs de λ la suite (u_n) est -elle convergente ?
3. On suppose que $0 < \lambda < 1$ et on appelle l la limite de la suite (u_n). Montrer que la série de terme général $v_n = u_n - l$, $n \geq 1$ est convergente.