IUP SID
Analyse
2011-2012

Examen du 9 Décembre 2011 de 15h45 à 17h45

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont autorisées.

1 Autour des suites

Soit f une fonction continue, strictement croissante et bornée sur $\mathbb{R}$. Soit u_0 un réel donné. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le signe de $(u_{n+2} - u_{n+1})$ est le même que celui de $(u_{n+1} - u_n)$.
3. Déduire de la question précédente que la suite (u_n) est monotone et qu'elle converge vers une limite notée l.
4. Expliquer pourquoi on a $l = f(l)$.
5. On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 + e^{-u_n}} - 5.$$

   Montrer que la suite (u_n) est convergente. Calculer une valeur approchée de sa limite.

2 Intégration

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2}, \int_{-\infty}^0 \frac{e^x dx}{e^{2x} + 3e^x + 2},$
2. $\displaystyle\int_{-3}^{\sqrt{3}-3} \frac{x dx}{x^2 + 6x + 12},$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} [x \sin(2x) - \cos^2(x)] \exp\left[-x \cos^2(x)\right] dx$. On rappelle que, pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\sin(2\theta) = 2 \cos\theta \sin\theta$.

3 Séries

1. Soit $a > 0$. Pour quelles valeurs de a la série de terme général u_n défini ci-dessous est-elle convergente ?
   (a) $u_n = a^{12n}$, $(n \in \mathbb{N})$,
   (b) $u_n = \frac{n}{(1+n)^{2a-12}}$, $(n \in \mathbb{N})$,
   (c) $u_n = a^{2n} C_{2n}^n$.